PUBBLICAZIONI

DEL REALE OSSERVATORIO DI BRERA IN MILANO.

N.° IX.

LE SFERE OMOCENTRICHE

DI EUDOSSO, DI CALLIPPO E DI ARISTOTELE.

MEMORIA

DI

G. V. SCHIAPARELLI,

Letta al Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere
nell'adunanza del 26 novembre 1874.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO.

MILANO,
Galleria De-Cristoforis,
59-60.

NAPOLI,
Via Roma, già Toledo
224.

PISA,
Via Cavour, 1,

1875.

LE SFERE OMOCENTRICHE DI EUDOSSO, DI CALLIPPO E DI ARISTOTELE.

MEMORIA

di G. V. SCHIAPARELLI.

Par quelle bizzarrerie le progrès que nous avons fait dans les mathématiques et dans certaines parties de la physique a-t-il inspiré à nos philosophes un mépris pour l'histoire des anciennes opinions, qui leur fait croire, que ces hommes et ces nations, qui se sont rendus si célèbres dans l'antiquité, ont été plongés dans les ténèbres philosophiques plus épaisses!
FRÉRET, *Observations générales sur la Géographie ancienne.*

I. CONSIDERAZIONI GENERALI.

L'astronomia dei Greci, nata con deboli principj nelle scuole della Jonia e dell'Italia, coltivata ed accresciuta nelle scuole matematiche che ebbero origine da Platone, fu perfezionata grandemente da Ipparco coll'introdurvi il calcolo applicato alla geometria, e raggiunse il suo apice con Tolomeo verso la metà del 2.° secolo di Cristo. I lenti, ma continuati progressi, che d'ipotesi in ipotesi e d'osservazione in osservazione, dal disco terrestre piano e circolare d'Omero condussero all'artifiziosa e multiforme compagine degli eccentri e degli epicicli, offrono al filosofo uno spettacolo grandioso ed istruttivo, e a chi ben considera, non meno interessante di quello che presenti lo sviluppo dell'astronomia moderna da Copernico ai nostri giorni. Sventuratamente però non è concesso allo studioso di conoscere con uguale esattezza tutti i gradi della scala, che dalle idee di Talete condusse il genio dei Greci alle ipotesi e alle tavole astronomiche degli Alessandrini. Perchè, mentre degli ultimi stadj di questo lavoro intellettuale rimasero durevoli ricordi nella *Grande composizione matematica*, di quanto si fece prima d'Ipparco, e di quanto si fece fuori della scuola d'Alessandria dopo d'Ipparco, non rimasero che deboli traccie ed imperfette notizie, per lo più tramandate da scrittori non astronomi. Quanto dunque si fece in astronomia dai Greci, fuori dell'anzidetta scuola, in gran parte è rimasto ignoto agli storici di questa scienza, o se noto, non fu generalmente dai medesimi colla dovuta diligenza ponderato; e quindi avviene, che dei primi progressi della medesima si devono cercare notizie sicure presso gli studiosi della filologia e dell'antichità classica, anzichè nei libri di Bailly, di Montucla, di Delambre, e dei numerosi loro imitatori o continuatori. Lo studio che ebbi l'onore di presentarvi l'anno scorso *Sui precursori di Copernico* può far di questo testimonianza evidente.

Ma dall'eccidio generale, onde, dall'Almagesto in fuori, furono colpiti tutti i più importanti monumenti della greca astronomia, un altro grave danno è derivato. — La difficoltà di ben conoscere, e sopratutto di ben interpretare i pochi ricordi che rimangono dell'astronomia greca non alessandrina, trasse i più ad ignorarla, o ben anche a disprezzarla, quando imperfettamente conosciuta; onde ebbe origine l'opinione falsa, ma oggi quasi generalmente ricevuta da tutti, che tutta l'astronomia scientifica dei Greci sia contenuta nell'Almagesto. Di questa tesi il più dotto ed autorevole sostenitore fu Delambre, e la sua voluminosa *Histoire de l'Astronomie ancienne* ne è un commento perpetuo. Eccone alcuni saggi: « Il est demontré, que du temps d'Archimède les Grecs n'étaient guère plus avancés (en Astronomie) que les autres peuples. Toutes leurs connaissances se trouvent à fort peu près rassemblées dans le poëme d'Aratus » (1). Altrove: « L'Astronomie n'a été cultivée véritablement qu' en Grèce, et presque uniquement par deux hommes, Hipparque et Ptolemée » : dove naturalmente s'intende parlare solo dell'astronomia degli antichi (2). Ed in un terzo luogo: « L'Astronomie des Grecs est toute entière dans la syntaxe mathématique de Ptolemée» (3). Queste proposizioni si trovano adottate quasi da tutti, e con tutte le variazioni possibili. « Nous ne voyons naître l'Astronomie en Grèce qu'avec Hipparque », dice Biot (4). « Vor der Alexandrinischen Schule ist an eine wissenschaftliche Bearbeitung der Astronomie nie und nirgend zu denken », ripete alla sua volta Maedler (5). Così cento altri di minore autorità.

Seguendo quest'idea in modo troppo assoluto, gli astronomi, che si accinsero a scriver la storia della loro scienza, non solo si occuparono assai leggermente delle speculazioni degli Jonii, dei Pitagorici e di Platone: ma di tutti i lavori della scuola di geometri, che fiorì in Grecia fra gli anni 400 e 300 avanti Cristo, o parlarono inesattamente e succintamente, o tacquero affatto. Eppure in questo intervallo, e prima che cominciasse la scuola d'Alessandria, si elaborava in Grecia il materiale degli *Elementi* d'Euclide, si inventavano e studiavano le sezioni del cono, e si imparava a risolvere i problemi per mezzo della descrizione meccanica di linee curve. Allora fu fatto un grande e memorabile tentativo per rappresentare i fenomeni celesti con ipotesi geometriche, e queste ipotesi furono messe a cimento colle osservazioni, e rettificate dove occorreva. Da queste investigazioni, a cui non mancò alcuno dei caratteri che costituiscono una ricerca scientifica nel più stretto senso che i moderni sogliono dare a questa espressione, era nato il sistema delle sfere omocentriche, per cui tant'alto si levò presso gli antichi il nome di Eudosso da Cnido. Del quale sistema, sebbene non rimanga più alcuna esposizione completa ed ordinata, tuttavia, dai cenni che ne fecero Aristotele ed Eudemo di Rodi, e Sosigene e Simplicio peripatetici, è ancora possibile ricostruire con certezza le linee principali. Ma vedi forza del pregiudizio! Eudosso non fu uno degli Alessandrini, e fu anteriore ad Ipparco; perciò gli fu negata la qualità di astronomo, anzi anche quella di geometra (6). Tanta originalità di concetto, tanta sottigliezza di costruzioni geometriche, tanti ingegnosi sforzi per avvicinarsi al risultato delle osservazioni, tanta ammirazione dei contemporanei, non trovarono grazia presso coloro che s'incaricarono di narrarci la storia dell'astronomia; e le sfere omocentriche procurarono ai loro autori assai maggior somma di biasimo che di lode.

---

(1) Delambre, *Histoire de l'Astronomie ancienne*, tome I. Discours préliminaire, p. X.
(2) Ibid. Tome I, p. 325.
(3) Ibid. Tome II. p. 67.
(4) *Journal des Savants*, 1857, p. 10.
(5) *Populäre Astronomie*, § 301.
(6) *Rien ne prouve qu'Eudoxe fut géomètre*. Questa enorme proposizione si trova enunciata presso Delambre, *Hist. de l'Astr. ancienne*. Tome I, p. 131. Mostrerò più avanti in qual conto si debba tenere.

Bailly, venendo a parlare del sistema delle sfere omocentriche di Eudosso, lo chiama a dirittura *assurdo* (7). Se assurda deve chiamarsi ogni ipotesi che non concorda intieramente colla verità, si può dire che tutta l'astronomia fu una scienza assurda fino a Keplero. Bailly però scusa Eudosso, considerando lo stato rudimentare dell'astronomia di quei tempi, e gli attribuisce anzi un merito, quello di avere, colle sue assurdità, mostrata la necessità di ricorrere ad altre ipotesi. Ma invano si cercherebbe presso Bailly un'idea alquanto chiara e precisa del sistema di Eudosso.

Montucla (8) non ha inteso questo sistema meglio di Bailly, e la spiegazione che pretende di darne è intieramente illusoria. Questo non gl'impedisce di mostrarsi anche assai più severo di Bailly, e di uscir fuori in queste parole: « On attribue à Eudoxe une sorte d'hypothèse physico-astronomique, qui répond mal à cette grande réputation qu'il eut chez les anciens... Une hypothèse aussi absurde et aussi peu conforme aux phénoménes célestes ne méritoit, ce me semble, que d'être rejetée avec mépris par les mathématiciens judicieux: mais telle étoit alors la foiblesse de l'astronomie physique, qu'elle ne laissa pas de trouver des approbateurs et même de mérite. Aristote se prit d'une belle passion pour elle, de même que Calippe et un certain Polémarque. Ils y convinrent de quelques corrections, qui la rendaient encore plus ridicule » etc. Sul medesimo tono rendono conto delle ipotesi d'Eudosso altri abbreviatori del Montucla e del Bailly, e l'ultimo storico dell'astronomia, Ferdinando Hoefer (9): « Le système (des sphères) d'Eudoxe fut aussitôt accueilli avec enthousiasme dans toute la Grèce, peut-être parce qu'il était plus absurde que les autres... On en porta successivement le nombre jusqu'à cinquante-six, pour arriver à les abandonner toutes, comme indignes de la science... »

Nella grande storia di Delambre, in cui l'astronomia antica da sè sola occupa non meno di 1270 pagine in-4.°, non mi è riuscito di trovare una parola con cui l'autore faccia menzione delle sfere d'Eudosso. Delambre ha letto e fatto estratti del commentario di Simplicio sui libri *de Cœlo*, e rende conto di questa sua operazione nelle pagine 301-310 del primo volume; ma sul passo così notabile di quel commento, che è la fonte principale delle nostre notizie sul sistema d'Eudosso, non trovo il minimo cenno. Forse gli sfuggì, o forse non volle annojare il lettore con l'esposizione di cose estranee alla scuola d'Alessandria, fuori della quale per lui non v'è storia dell'astronomia. Una specie d'allusione al sistema d'Eudosso sembra però si possa vedere nel seguente passo del *Discorso preliminare* (10):

« Platon conseilla aux astronomes de chercher l'explication des mouvements célestes dans » la combinaison de différents cercles: ils suivent ce conseil, et faute d'idées assez précises et » de bonnes observations, ils multiplient les cercles outre mesure et sans aucun succès ». Se Delambre ha inteso di parlar qui delle sfere d'Eudosso (dovute, come si vedrà, all'iniziativa di Platone), convien credere che egli riguardasse tal sistema come un primo grossolano abbozzo della teoria degli epicicli. Ma è certissimo non esservi fra gli epicicli e le sfere omocentriche alcuna specie d'analogia. Questa confusione di cose così disparate si trova anche presso altri scrittori, per esempio presso Whewell, il quale nella sua *Storia delle scienze induttive* ha dato qualche cenno delle sfere d'Eudosso, e non sembra distinguerle dagli epicicli, la cui

(7) Bailly, *Histoire de l'Astronomie ancienne*, p. 242.

(8) Montucla, *Hist. des Math.* 2.ª ed. I vol. p. 182-183.

(9) Hoefer, *Histoire de l'Astronomie*. Paris, 1873, p. 136.

(10) Delambre, *Astr. anc.* vol. I, pag. X.

invenzione egli fa risalire ai tempi di Platone, ed anche più indietro (11). E Maedler, nella sua recente *Storia dell'Astronomia*, crede dimostrare, che le sfere d'Eudosso sono essenzialmente la stessa cosa che gli epicicli di Tolomeo, e non ne differiscono che per la maggior complicazione (12).

Il primo, che abbia impiegato qualche industria per penetrare il segreto del sistema in discorso, sembra sia stato Corrado Schaubach, il quale, fra molti studj da lui fatti sull'astronomia primitiva dei Greci, uno ne presentò, nel 1800, alla Società delle scienze di Gottinga *Sopra le idee d'Eudosso intorno al sistema planetario* (13). I risultamenti di questa investigazione furono da lui esposti nella bella *Storia dell'Astronomia greca prima d'Eratostene*, pubblicata nel 1802 (14). Malgrado la diligenza con cui questo scrittore studiò le fonti che trattano di questa materia, egli non riuscì a scoprire il nodo della questione, ed anzi fu tratto in inganno nell'interpretazione dei numeri che Eudosso assegna alle rivoluzioni sinodiche dei cinque pianeti.

Il solo che, a mia notizia, abbia tentato con parziale successo di conoscere alquanto a fondo il meccanismo delle sfere omocentriche, e che abbia reso al loro autore la dovuta giustizia, è stato Lodovico Ideler nella sua eccellente monografia intorno ad Eudosso (15), stampata fra le Memorie dell'Accademia Reale di Berlino degli anni 1828 e 1830. Ideler riconobbe il principio fondamentale di questa teoria, e seppe, col mezzo di un globo ordinario, rendersi ragione approssimativamente del modo, con cui Eudosso spiegava le stazioni e le retrogradazioni dei pianeti, ed il loro movimento in latitudine. Tuttavia egli, avendo per le mani altra tela più vasta, non si addentrò abbastanza nello studio di quelle combinazioni di movimenti, e varie cose gli rimasero oscure, di altre non diede esatta interpretazione. Ma sempre gli rimane il merito di aver fatto in questa materia il passo più importante.

Di quelli che vennero dopo Ideler, nessuno (salvo H. Martin) parve aver preso notizia del suo bel lavoro; onde anche oggidì si continua a scriver la storia delle ipotesi d'Eudosso come la scrivevano un secolo fa Montucla e Bailly. Dobbiamo eccettuare sir George Cornewall Lewis, il quale nella sua opera sull'astronomia degli antichi (16) mostra di conoscere la Memoria d'Ideler, ma non di comprenderne l'importanza; egli pure non ha inteso il senso delle durate assegnate da Eudosso alle rivoluzioni planetarie. Però egli giustamente riconosce, che in questo problema e nella soluzione datane da Eudosso vi doveva esser nascosta molta sottile geometria, sebbene poi non sembri credere possibile di ricondurla alla luce (17).

Nella presente Memoria io mi sono proposto di completare e di correggere l'opera d'Ideler, e di mostrare infine agli astronomi ed ai geometri quale somma d'ingegnose combinazioni

---

(11) WHEWELL, *Geschichte der inductiven Wissenschaften*, edizione tedesca di Littrow, vol. 1, 137-139.

(12) MAEDLER, *Geschichte der Himmelskunde*, p. 47. Braunschweig 1873.

(13) SCHAUBACH, *Ueber Eudoxus Vorstellung vom Planetensystem*. Nelle *Gotting. gelehrte Anzeigen* del 1800, n. 54.

(14) SCHAUBACH, *Geschichte der Griechischen Astronomie bis auf Eratosthenes* (Göttingen 1802), p. 433-442.

(15) IDELER, *Ueber Eudoxus*. Mem. dell'Acc. di Berlino, Classe istorico-filologica, anno 1828, p. 189-212; anno 1830, p. 49-88.

(16) CORNEWALL LEWIS, *An historical Survey of the Astronomy of the Anciens*. London, 1862, p. 153-156.

(17) « It is difficult to understand how these co-revolving orbs were conceived to harmonize in producing a single resulting motion: but the Greeks, even in the time of Eudoxus, were subtle geometers, and they doubtless had formed a clear idea as to the solution of a problem which was substantially geometrical ». *Anthistorical Survey*, etc. p. 153. E altrove: « The theory of composite spheres, devised by Eudoxus and developed by Callippus and Aristotle, was ingenious and required much geometrical resource. » Ibid., p. 210.

sta nascosta in ciò che ad altri è sembrato ridicolo, o non degno di attenzione alcuna. Noi vedremo messa per la prima volta in chiaro la natura di quella elegante epicicloide sferica, detta da Eudosso *ippopeda*, che è il cardine fondamentale di tutto il suo sistema. Investigheremo entro quali limiti di esattezza le ipotesi eudossiane potevano adattarsi a rappresentare le osservazioni; e da questo studio ricaveremo qualche luce (sebbene non tanta, quanta si potrebbe desiderare) per conoscere la natura delle riforme, che Callippo e Polemarco v'introdussero posteriormente. E comprenderemo ancora la necessità e la ragione di quella grande moltiplicità di sfere, che a torto fu rimproverata da chi non ne intendeva l'ufficio; e che parvè cosa degna di riso e di compassione alla nostrà epoca, la quale, senza saperlo, nelle teorie planetarie fa uso degli epicicli a decine e a centinaja, nascondendoli sotto il titolo di *termini periodici di serie infinite.*

Nel prender a meditare su quei monumenti dell'antico sapere, inspiriamoci, o lettore, a quel rispetto ed a quella venerazione che si devono avere per coloro, che, precedendoci in un'ardua strada, ne hanno a noi aperto ed agevolato il cammino. Con questi sentimenti impressi nell'animo ben ci avverrà d'incontrare osservazioni imperfette e speculazioni lontane dalla verità come oggi è conosciuta; ma non troveremo mai nulla nè di assurdo, nè di ridicolo, nè di ripugnante alle regole del sano ragionare. Se oggi noi, tardi nipoti di quegli illustri maestri, profittando dei loro errori e delle loro scoperte, e salendo in cima all'edifizio da loro elevato, siamo riusciti ad abbracciare collo sguardo un più vasto orizzonte, stolta superbia nostra sarebbe il credere per questo d'aver noi la vista più lunga e più acuta della loro. Tutto il nostro merito sta nell'esser venuti al mondo più tardi.

II. Origine delle sfere omocentriche.

Già molto prima d'Eudosso i filosofi greci (che allora erano ad un tempo e fisici e geometri ed astronomi) avevano immaginato diverse costruzioni per rappresentare in modo plausibile le principali apparenze che si osservano nella disposizione e nel movimento degli astri. Fra altri ricordi delle opinioni cosmologiche della scuola Jonica si sono conservate alcune notizie intorno a certi curiosi meccanismi che aveva supposto Anassimandro per rendersi conto del moto del Sole e della Luna in declinazione, e per spiegare i fenomeni delle eclissi. Ma da queste notizie poco si può ricavare di preciso e di soddisfacente. Più copiose sono le memorie rimaste della scuola Pitagorica e di Platone. In altra lettura (18) ho descritto le ipotesi astronomiche, con cui Filolao riuscì a combinare il moto diurno dei pianeti, del Sole, e della Luna, col loro movimento periodico lungo lo zodiaco; ed ho pure indicato quanto di più certo intorno alle idee astronomiche di Platone si può ricavare dallo studio de' suoi libri. Da tale studio emerge il fatto, che ai tempi di Filolao (440 circa) non si era mosso ancora alcun tentativo per spiegare le stazioni e le retrogradazioni dei pianeti; e dal modo avviluppato con cui Platone parla di questi fenomeni nel libro X della *Repubblica* e nel *Timeo*, sembra anzi si possa inferire, che egli medesimo non avesse neppur una idea molto precisa della legge e dei periodi con cui essi avvengono. Tuttavia egli aveva potuto convincersi dell'insufficienza delle ipotesi fino allora proposte, le quali ben potevano dare un'immagine approssimativa del modo con cui si producono le apparenze più salienti del cielo, ma non giungevano però a render ragione di tutto quello, che già a quel tempo poteva constare anche dalle più sommarie osservazioni. Un'attenzione continuata aveva posto in

(18) *I precursori di Copernico nell'antichità*. Mem. del R. Istituto Lomb. Vol. XII, pag. 342-381.

chiaro il movimento bizzarro e variamente inflesso dei pianeti sulla sfera celeste, e Platone stesso sentiva, che a spiegarlo ben altro occorreva, che supporre ciascun pianeta portato semplicemente in giro da una sfera ad esso speciale. Ond'egli, secondo che narrò Eudemo nella sua storia dell'astronomia (19), propose agli astronomi la questione di « trovare con quali supposizioni di movimenti regolari ed ordinati si potessero rappresentare le apparenze osservate nei movimenti dei pianeti ».

Questo appello fu inteso e raccolto da Eudosso di Cnido (nato intorno al 408, morto intorno al 355), il quale era stato già discepolo dello stesso Platone, ed acquistò grande fama non meno nella geometria che nell'astronomia. Egli era andato di poi a studiare in Egitto, secondo l'uso di molti savj di quell'epoca, e munito di lettere commendatizie d'Agesilao spartano per il re d'Egitto Nectanebo (20), aveva ottenuto la facoltà d'iniziarsi ai segreti del sapere egiziano, nei quali gli fu assegnato a maestro Conufi, sacerdote d'Eliopoli. Ivi, se crediamo a Seneca, egli apprese a conoscere i movimenti dei pianeti, di cui portò in Grecia notizie più complete di quelle che si avessero prima (21). Ciò significa, come giustamente osserva Ideler nella sua citata Memória, che Eudosso apprese in Eliopoli i periodi delle rivoluzioni planetarie, e forse le durate, le ampiezze e le diverse fasi delle loro stazioni e retrogradazioni, come ai sacerdoti egiziani risultavano dall'osservazione immediata. Nulla dà nell'antico Egitto il minimo indizio di speculazioni geometriche profonde, quali si richiedono per una vera teoria dei moti planetarj (22).

Ma la qualità di geometra, che noi non siamo ancora autorizzati a concedere agli Egiziani, Eudosso la possedeva in alto grado, siccome consta da molte ed autorevoli testimonianze (23). Si racconta che Platone, consultato da quei di Delo perchè li ajutasse nel problema loro proposto dall'oracolo, di duplicare l'altare in volume, conservandogli la forma cubica che prima aveva, abbia risposto che conosceva solo due uomini capaci di vincere questa difficoltà, cioè Eudosso da Cnido ed Elicone da Cizico (24). Più autentica è la testimonianza di Proclo, autore versatissimo nella storia degli antichi matematici; il quale annovera Eudosso fra quelli, che hanno fatto progredire ogni parte della geometria (25). Eudosso infatti accrebbe il numero dei teoremi generali, tra i quali appartengono a lui quei due principalissimi della geometria solida, concernenti il rapporto della piramide e del cono al prisma ed al cilindro di ugual base e di uguale altezza. Euclide, nella composizione degli

---

(19) Vedi l'Appendice II in fine di questa Memoria. § 1.

(20) Non è certo se si tratti del primo o del secondo dei re egiziani di questo nome. BOECKH (*Ueber die vierjährige Sonnenkreise der Alten*, p. 136-142) sta per il primo, e mette il viaggio di Eudosso in Egitto nel secondo o nel terzo anno della centesima olimpiade (379 o 378 avanti Cristo). IDELER propende per il secondo (*Ueber Eudoxus*, p. 194-195), il quale regnò fra gli anni 362 e 354.

(21) *Eudoxus primus ab Aegypto hos motus in Graeciam transtulit.* SENECA, *Quæst. Nat.* VII, 3.

(22) Il solo fatto che sembra contraddire quest'asserzione è un'allusione al moto della Terra, trovata dal signor Chabus in un antico papiro egiziano, nel quale si dice ad un personaggio potente, che *la Terra naviga secondo la sua volontà.* Il papiro avrebbe, secondo Chabas, forse 4000 anni d'antichità; le parole sopra citate sono poste in bocca ad una persona contemporanea d'un re *Neb-ka-ra*, che si suppone anteriore alla costruzione delle grandi piramidi! Sarà forse prudente attendere, su tale spinosa questione, il risultamento di ulteriori dilucidazioni. Vedi CHABAS, *Sur un texte égyptien relatif au mouvement de la Terre*, nella *Zeitschrift für aegyptische Sprache und Alterthumskunde.* Dicembre, 1864.

(23) Sono raccolte da IDELER, nella sua Memoria intorno ad Eudosso. V. *Memorie dell'Acc. di Berlino*, anno 1828, p. 203-212.

(24) PLUTARCO, *De genio Socratis*, c. 8.

(25) PROCLI DIADOCHI *in primum Euclidis Elementorum librum Commentarii.* ed. FRIEDLEIN (Lipsiae, Teubner, 1873), p. 67.

Elementi, prese una parte notabile del suo materiale dai libri di Eudosso (26), e si vuole che il quinto libro, il quale tratta della teoria delle proporzioni, appartenga intieramente a questo astronomo (27). Eudosso perfezionò inoltre la dottrina delle linee curve, già iniziata da Platone, e specialmente considerò quelle che nascono dalle sezioni dei solidi. Per questo studio delle curve, e per l'uso da lui fattone nella soluzione del problema della duplicazione del cubo, Eudosso ebbe fra i geometri antichi una grandissima celebrità, onde Eratostene, citando la sua soluzione del detto problema, gli diede il titolo di *divino* (28). Egli considerò specialmente la generazione *organica* delle curve, cioè la loro descrizione per mezzo di certi meccanismi; e noi vedremo che la sua *ippopeda* appartiene appunto alla classe delle curve meccaniche. Finalmente Proclo attesta, che Eudosso fu uno dei primi a servirsi del metodo analitico per la considerazione delle proprietà delle linee curve.

Ma la eccellenza di Eudosso come geometra è attestata ancora dalla fama dei valenti matematici usciti dalla scuola ch'egli fondò, verso l'anno 375, nella città di Cizico, sulle amenissime rive della Propontide. Fu infatti suo discepolo Menecmo, il primo che abbia studiato sistematicamente le proprietà delle sezioni del cono, e che sciolse con queste il problema della duplicazione del cubo. Menecmo era nativo di Alopeconneso, città del Chersoneso Tracio, o, secondo altri, di Proconneso, isola della Propontide vicina a Cizico; come Eudosso, studiò sui movimenti celesti; e di lui fu fratello Dinostrato, l'inventore delle *quadratrici*. Alla scuola di Eudosso appartenevano ancora Elicone ed Ateneo, ambi ciziceni, ambi geometri famosi, il primo anche astronomo e conosciuto per una predizione d'eclisse. D'Eudosso fu conoscente e da lui imparò la dottrina delle sfere omocentriche Polemarco ciziceno, che vedremo occupato a correggere quelle ipotesi astronomiche; e finalmente discepolo di Polemarco fu Callippo, anch'egli ciziceno, che dopo la morte d'Eudosso tenne in Grecia il primato dell'astronomia, ed anch'egli s'impegnò a riformare, con Polemarco e con Aristotele, il sistema delle sfere omocentriche (29).

Queste notizie sull'attività matematica di Eudosso sono sufficienti senza dubbio a far comprendere, com'egli abbia potuto dare del problema proposto da Platone la soluzione elegante, che ci accingiamo a sviluppare; ed a confutare il dubbio espresso da Delambre sul valore del medesimo nelle cose di geometria (30). Aggiungerò con Ideler, che tutte le notizie rimaste di lui, concorrono a mostrarci in Eudosso un uomo di genio pratico e positivo (come oggi si direbbe), ed alieno da ogni oziosa speculazione. Per questo egli non ebbe alcuna fede nell'astrologia, che già da Babilonia cominciava ad aprirsi strada verso la Grecia; e per questo non si trova di lui, come si trova d'altri suoi contemporanei ed antecessori, che abbia espresso opinioni sopra cose inaccessibili all'osservazione ed all'esperienza de' suoi tempi. Così, per esempio, invece di speculare, come altri, sulla natura del Sole, egli si limitava a dire, che avrebbe volontieri subìto il destino di Fetonte, pur di giungere a sapere che cosa sia il Sole (31).

Tale era l'uomo, che raccolse la sfida lanciata da Platone agli astronomi del suo tempo. Per risolvere il grande problema, e per giungere ad una spiegazione razionale dei movimenti

(26) *Ibid.*, p. 68.

(27) IDELER, nel luogo citato, p. 200 e 207.

(28) *Ibid*, pag. 211.

(29) Sulla scuola matematica Cizicena ha raccolto molte importanti notizie BOECKH nella sua ultima opera, *Ueber die vierjährige Sonnenkreise der Alten*, p. 150-155.

(30) DELAMBRE, *Astr. anc.* I., p. 131. Vedi sopra nota (6).

(31) IDELER, nel luogo citato, p. 198, sull'autorità di Plutarco.

celesti, occorreva anzitutto stabilire un principio, intorno al quale tutti si potessero accordare. E questo fu, che la composizione del mondo dovesse essere ordinata secondo una legge unica e generale (32). Agli astronomi greci mancava la legge fisica della gravitazione universale; dovettero dunque tenersi a leggi geometriche, sotto pena di cadere nell'arbitrario. Ora la rivoluzione quotidiana delle fisse offriva un moto circolare ed uniforme; circolare ed uniforme appariva pure il moto del Sole e della Luna alle osservazioni di quel tempo. Poichè i movimenti degli astri doveano dipendere tutti dalle medesime leggi, giustamente fu concluso per analogia, che le anomalie osservate nel corso dei pianeti dovessero esser soltanto apparenti, e dovessero risolversi anch'esse nella combinazione di più moti circolari ed uniformi. Questo assioma, di cui, per testimonianza di Gemino (33), il primo enunciato si deve ai Pitagorici, fu da tutta l'antichità posto come base inconcussa delle ipotesi astronomiche, e con ragione; infatti, checchè oggi se ne voglia dire, gli antichi fuori di esso non avrebbero trovato che l'arbitrio ed il caos. Tale assioma conservò in astronomia intiera la sua autorità fino ai tempi di Keplero, il quale sostituì il moto ellittico al moto circolare. Tuttavia Keplero stesso obbedì ancora a questo principio, quando proclamò l'uniforme descrizione delle aree; e ad esso pure obbedirono, dopo di lui, Bouillaud e Seth Ward, quando immaginarono l'*ipotesi ellittica semplice,* in cui si suppone uniforme il movimento angolare dei pianeti intorno a quel fuoco dell'ellisse, che non è occupato dal Sole. La sua autorità non fu intieramente distrutta che quando, per opera di Galileo, di Newton, e dei loro continuatori, fu escluso affatto l'elemento metafisico dallo studio della natura.

Un'altra condizione, a cui dovettero assoggettarsi i primi che specularono sulla forma dell'universo, fu quella di attribuire a tal forma la maggior possibile semplicità e simmetria di costruzione. Così, nel sistema di Filolao, le orbite dei corpi celesti formano un insieme di circoli descritti intorno ad un centro comune; e la stessa regola, od almeno una simile, si osserva nei varj schemi immaginati da Platone. A tale supposizione fondamentale si attenne pure Eudosso, e tutte le sue sfere immaginò descritte concentricamente alla Terra e intorno ad essa simmetriche (34); onde a buon diritto fu dato loro in tempi posteriori il nome di sfere *omocentriche.* Adottando questa supposizione, il problema diventava assai più difficile, poichè a queste sfere era così tolto ogni movimento di traslazione, e non rimaneva al geometra altro modo di rappresentare i fenomeni, che quello fondato sulla combinazione dei loro movimenti rotatorj; ma alla fabbrica del mondo si conservava in tal modo un'eleganza, da cui le costruzioni d'Ipparco e di Tolomeo e degli altri tutti, compreso Copernico, rimasero assai lontane, e che non trovò più l'uguale, fino ai tempi di Keplero. Tale concentricità delle sfere celesti avea inoltre il vantaggio di non contraddire alla testimonianza dei sensi ed alle opinioni, tuttora rispettate, degli antichi fisici. Si dovea anche cercare di esperimentare ogni cosa possibile, prima d'introdurre nel cielo un elemento di asimmetria e d'arbitrio, qual è il moto eccen-

---

(32) « Ante omnia, quae ad mathematicarum rerum considerationem spectant, est principiorum sumptio, ut inter omnes convenit. Quorum primum est, mundi compositionem existere ordinatim ope unius principii administratam » Così Dercillide filosofo platonico presso Teone Smirneo. (THEONIS *Astronomia* ed. H. Martin, p. 327). Nessuno oserà dire che oggi occorra ragionar altrimenti.

(33) GEMINI, *Isagoge ad phœnomena,* Cap. I.

(34) Vedi l'Appendice II, dove Simplicio afferma espressamente questa concentricità. Essa del resto risulta in modo evidente dall' insieme di tutti i particolari del sistema. Con questo rimane d'un tratto confutata l' opinione di quelli che hanno voluto vedere nel sistema di Eudosso il germe delle teorie epicicliche adottate più tardi da Ipparco e dagli astronomi alessandrini.

trico; senza parlare della naturale ripugnanza che si dovette da principio provare ad ammettere, che i corpi celesti potessero descrivere circoli intorno a centri puramente ideali e privi di ogni contrassegno sensibile.

Eudosso immaginò dunque, press'a poco come avea fatto Platone prima di lui, che ogni corpo celeste fosse portato in circolo da una sfera girevole sopra due poli, e dotata di rotazione uniforme; suppose inoltre, che l'astro fosse attaccato ad un punto dell'equatore di questa sfera, in modo da descrivere, durante la rotazione, un circolo massimo, posto nel piano perpendicolare all'asse di rotazione della medesima. A render conto delle variazioni di celerità dei pianeti, del loro stare e retrogradare, e del loro deviare a destra ed a sinistra nel senso della latitudine, tale ipotesi non bastava, e convenne supporre che il pianeta fosse animato da più movimenti analoghi a quel primo, i quali sovrapponendosi producessero quel movimento unico, in apparenza irregolare, che è quello che si osserva. Eudosso stabilì dunque, che i poli della sfera portante il pianeta non stessero immobili, ma fossero portati da una sfera più grande, concentrica alla prima, girante a sua volta con moto uniforme e con velocità sua propria intorno a due poli diversi dai primi. E siccome neppure con questa supposizione si riusciva a rappresentare le apparenze per nessuno dei sette astri erranti, Eudosso attaccò i poli della seconda sfera entro una terza, concentrica alle due prime e più grande di esse, alla quale attribuì pure altri poli, ed altra velocità sua propria. E dove tre sfere non bastavano, aggiunse una quarta sfera, comprendente in sè le tre prime, portante in sè i due poli della terza, e anch'essa ruotante con propria velocità intorno a'suoi proprj poli. Ed esaminando gli effetti di tali movimenti insieme combinati, Eudosso trovò che, scegliendo convenientemente le posizioni dei poli e le velocità di rotazione, si potevano rappresentar bene i movimenti del Sole e della Luna, supponendo ciascuno di essi portato da tre sfere; i movimenti più varj dei pianeti trovò richiedere quattro sfere per ciascuno. Le sfere motrici di ciascun astro suppose affatto indipendenti da quelle che servivano a muovere gli altri. Quanto alle stelle fisse, bastava una sola sfera, quella che produce la rotazione diurna del cielo. L'ordine dei pianeti serbato da Eudosso era poi identico a quello supposto da Platone; e l'insieme del sistema era quale si vede nel sottoposto quadro.

Nome ed ordine degli astri.	Numero delle sfere motrici.
Saturno	4
Giove	4
Marte	4
Mercurio	4
Venere	4
Sole	3
Luna	3

Così il numero totale delle sfere motrici riusciva di 26, più una per le stelle fisse. Quale fosse la causa di questi movimenti rotatorj, e come da una sfera si comunicassero ad un'altra, non si trova che Eudosso l'abbia cercato; nè quale fosse la materia e la grossezza delle sfere stesse; nè quali fossero i loro diametri ed i loro intervalli. Soltanto appare da Archimede (35), che Eudosso supponeva il Sole nove volte più grande della Luna; quindi è lecito concludere, che ritenesse il primo esser nove volte più lontano della seconda. Egli poteva

(35) Nell'*Arenario.*

facilmente giungere a questa estimazione collo studio attento delle fasi della Luna nelle diverse sue elongazioni dal Sole. Eudosso adunque si astenne totalmente dal ricercare quello, che non importava al suo principale problema, alla *rappresentazione geometrica dei fenomeni;* nel che vediamo un'altra prova del suo genio sobrio e rigoroso. Egli non si curò tampoco di connettere le sfere motrici con quelle del pianeta immediatamente superiore e del pianeta immediatamente inferiore, e suppose che le sfere addette al movimento di ciascun pianeta formassero un sistema isolato ed indipendente dal resto. Insomma ogni cosa porta a credere, che le sfere fossero per lui gli elementi di un' ipotesi matematica, non già enti fisici; onde a torto gli fu rimproverato d'aver chiuso l'universo in vôlte di cristallo, e di averle moltiplicate senza necessità.

Eudosso aveva descritto le sue ipotesi in un'opera *sulle velocità*, περὶ ταχῶν, che con tutte le altre sue cose è andata perduta (36). Aristotele, il quale fu posteriore ad Eudosso soltanto d'una generazione, e trattò di questo argomento con Polemarco, che fu conoscente d'Eudosso, potè avere informazioni sicure sul meccanismo delle sfere; onde il breve ma esatto (sebbene non completo) riassunto che ne dà nel libro XII della *Metafisica* merita molta attenzione. Che Teofrasto ne abbia parlato nella sua perduta *Storia dell'Astronomia*, è probabile; si narra anzi che egli desse il nome di ἄναστρος (senza stelle) alle sfere destinate a muovere i pianeti (37). Certo è poi, che Eudemo trattò a lungo del sistema d'Eudosso nel secondo libro della sua storia astronomica; e da Eudemo trasse Sosigene (il noto riformatore del calendario) la narrazione da lui data con molta prolissità nel commentario che fece sui libri *de Cœlo.* Tal commentario è perduto; ma un lunghissimo estratto del medesimo ci fu conservato da Simplicio nel suo proprio commentario al libro II *de Cœlo;* ed è questa la nostra fonte principale, la quale per conseguenza è pur essa molto degna di fede, risalendo ad Eudemo, che fu contemporaneo d'Aristotele, e di poco posteriore ad Eudosso (38). Colla scorta di queste autorità io mi farò ora ad esporre partitamente la teoria che Eudosso aveva immaginato per ciascuno dei sette astri erranti, e comincerò dal più basso di tutti, che è la Luna.

III. Teoria lunare di Eudosso.

La teoria, che immaginò Eudosso per spiegare le rivoluzioni della Luna, è molto semplice. Aristotele e Simplicio (§ 3) s'accordano nel riferire, che i suoi movimenti erano prodotti in questa teoria da tre sfere ruotanti di moto uniforme; la prima delle quali e più esterna si muoveva secondo le fisse; la seconda intorno all'asse dello zodiaco; la terza secondo un circolo collocato obliquamente nella larghezza della zona zodiacale. Di queste, la prima, volgendosi da oriente in occidente, produceva la rivoluzione diurna; la seconda, volta

(36) Vedi App. II, § 2. Sarà questa una delle bellissime Memorie (κάλλιστα ὑπομνήματα) che Diogene Laerzio narra Eudosso aver scritto.

(37) Vedi App. II.

(38) Essendo Aristotele e Simplicio le uniche fonti da cui si possono trarre notizie sull'argomento che ci occupa, ho creduto opportuno trascrivere i relativi estratti nelle App. I e II, in fine di questa Memoria. L'App. I comprende il passo di Aristotele, e la App. II il passo di Simplicio, che in gran parte è cavato da Sosigene. Essendo oggi facile aver per le mani gli originali greci, ho stampato la sola versione italiana, per uso di quei lettori cui non fosse comodo aver ricorso a quelli. Il lungo estratto di Simplicio, il quale nell' originale non porta alcuna divisione, è stato da me diviso in paragrafi numerati, per comodo delle citazioni. Tutte le citazioni di Simplicio che si trovano nella presente Memoria, si riferiscono a questi paragrafi dell'App. II. Le citazioni di Aristotele, quando non si noti il contrario, si riferiscono all'App. I.

da occidente in oriente, produceva la rivoluzione mensile. Quanto alla terza sfera, Simplicio aggiunge, che si moveva in senso contrario alla seconda, e in senso uguale alla prima; che essa aveva un lento moto di rivoluzione intorno ad un asse perpendicolare al piano del circolo, che sembra descritto dal centro della Luna; del qual piano l'inclinazione sul piano dell'eclittica era eguale alla massima digressione della Luna in latitudine. L'aggiunta di questa terza sfera poi era stata resa, secondo Simplicio, necessaria per questo, che la Luna non sembra raggiungere nei medesimi punti dello zodiaco la sua latitudine più boreale e la sua latitudine più australe, ma trasporta sempre questi punti tropici contro l'ordine dei segni; onde il moto di questa sfera fu supposto farsi nel medesimo senso che la rivoluzione delle fisse.

La dichiarazione di Simplicio non lascia nulla a desiderare dal lato della chiarezza; e si riconosce facilmente, che le tre sfere erano destinate a rendere ragione dei tre movimenti lunari conosciuti da Eudosso; cioè del moto diurno, del moto siderale menstruo, e della retrogradazione dei nodi dell'orbita lunare sull'eclittica. Non vi sarebbe altro da aggiungere, se l'ordine della velocità non si trovasse male indicato presso Simplicio.

Ed infatti è manifesto, che, stando le cose com'egli ha riferito, e collocando nell'ultimo luogo quella sfera, la quale si volge di moto lentissimo, ed è destinata a mostrare la retrogradazione dei nodi, la Luna non passerebbe per un dato nodo che *una sola volta* durante il periodo assai lungo che il detto scrittore attribuisce alla terza sfera, periodo che probabilmente Eudosso non ignorava esser di 223 lunazioni. Al fine di ottenere il passaggio della Luna pe' suoi nodi colla frequenza che si osserva, è necessario scambiare le velocità delle due sfere interiori; facendo cioè che la sfera più interna descriva il moto mensuale della Luna in circa 27 giorni (39) lungo un circolo inclinato sull'eclittica di una quantità uguale alla massima digressione della Luna in latitudine; che poi tale circolo obliquo sia portato in giro con moto retrogrado lungo l'eclittica dalla seconda sfera con periodo uguale a 223 lunazioni; e che finalmente ambe le sfere interiori siano aggirate secondo il moto delle fisse dalla sfera più esterna. Così tutto succede secondo l'ordine osservato; e così senza dubbio immaginava la cosa Eudosso. L'errore di Simplicio è stato riconosciuto anche da Ideler (40).

Noi sappiamo così con precisione, a qual grado di perfezione era pervenuto a quell'epoca presso i Greci lo studio dei movimenti lunari. Le osservazioni erano giunte al punto da far riconoscere il moto della Luna in latitudine, e la retrogradazione dei nodi dell'orbita lunare. Quando si considerano gl'imperfettissimi mezzi di osservazione, che si avevano in quei tempi, e quando si pensa, che forse tutto si riduceva a notare la posizione della Luna fra le stelle sopra globi grossolanamente costruiti; si dovrà concedere a quegli astronomi il merito dell'assiduità e della diligenza. Eudosso non conosceva ancora, o per lo meno non ammetteva alcuna anomalia nel moto di longitudine; ma vedremo fra poco, che Callippo intorno al 325 già ne aveva contezza, venti o trent'anni dopo Eudosso. Della diligenza con cui s'investigavano allora i movimenti della Luna, e tutto quello che ha rapporto con questo astro, fanno pur fede gli scritti di Filippo Opunzio, amico e discepolo di Platone, e coetaneo d'Eudosso; tra i quali si trovano citati un libro *Sulle grandezze del Sole, della Luna e della Terra;*

---

(39) Il lettore vedrà facilmente, che la rivoluzione della Luna e della sfera più interna deve essere supposta uguale al mese draconico, cioè all'intervallo che riconduce la Luna a' suoi nodi, che è di 27 giorni, 5 ore, 5 minuti, 36 secondi.

(40) Vedi le sue identiche riflessioni nelle Memorie dell'Acc. di Berlino, 1830, p. 77, Classe istorico-filologica.

un altro *Sulle distanze del Sole e della Luna;* un terzo *Sopra le eclissi della Luna* (41). Noi abbiamo già accennato, dietro l'autorità d'Archimede, che Eudosso si era occupato della proporzione della grandezza del Sole e della Luna; e lo stesso Archimede parla d'un tal Fidia, figliuolo d'Acupatre, il quale aveva studiato lo stesso problema, e stimava il Sole dodici volte più grande della Luna (42).

Ma la prova più palese dei progressi che ai tempi d'Eudosso si fecero nello studio dei movimenti lunari sta in ciò, che in questi medesimi tempi appunto s'incominciano ad aver notizie di predizioni d'eclissi fatte ed avverate coll'osservazione. Di Elicone ciziceno, discepolo d'Eudosso, si racconta, che trovandosi con Platone e con Aristippo alla Corte di Dionigi II, tiranno di Siracusa, annunziò un'eclisse solare, la quale infatti avvenne; e che da Dionigi fu perciò ricompensato col dono di un talento. Si crede che questa sia l'eclisse avvenuta il 12 maggio dell'anno 361, secondo le tavole astronomiche dei recenti (43). Noi non oseremo asserire con questo, che gli astronomi greci conoscessero già il modo di tener conto delle parallassi, e che le loro predizioni di eclissi solari si avverassero sempre. È anzi credibile, che Elicone nel suo successo sia stato ajutato tanto dalla fortuna, quanto dal suo sapere. Ma non vi ha dubbio, che la cognizione del movimento dei nodi lunari già a quei tempi poneva in grado gli astronomi greci di riconoscere in quali mesi dell'anno si potevano aspettare eclissi così di Luna come di Sole, e di discernere quali erano le congiunzioni e le opposizioni eclittiche più salienti. Con queste cognizioni già si poteva tentare con successo la predizione della maggior parte delle eclissi di Luna; quanto alle eclissi di Sole, l'astronomo dovea limitarsi ad indicare le epoche in cui si potevano aspettare, e rassegnarsi nello stesso tempo a veder fallire in molti casi la sua aspettazione (44).

---

(41) Boeckh, *Ueber die vierjährige Sonnenkreise der Alten,* pag. 36. Poichè Filippo d'Opunte aveva scritto sulla grandezza della Terra, non è improbabile ch' ei debba comprendersi nel numero di quei *matematici*, dei quali Aristotele (*De Cœlo* II, 14), riferisce aver cercato la misura della Terra, e trovatala di 400,000 stadj.

(42) Archimede, nell'*Arenario.*

(43) La dimostrazione relativa si trova presso Boeckh, *Die vierjährige Sonnenkreise der Alten,* p. 153-154.

(44) Gli è del resto quanto già sapevano fare gli astronomi caldei alcuni secoli prima d'Eudosso. Infatti, non era possibile osservare le eclissi di Luna citate da Tolomeo nell'*Almagesto* come vedute in Babilonia, se gli osservatori non fossero stati già in qualche modo preparati. Tra queste eclissi ve ne sono alcune di *due* o di *tre digiti*, le quali sfuggirebbero senza dubbio anche ad un osservatore moderno, quando non ne fosse prima avvertito. E tre di queste eclissi furono osservate, nello spazio di 18 mesi, negli anni 721 e 720 prima di Cristo. Inoltre, per la maggior parte di esse è assegnato il *tempo del principio:* tutte circostanze che suppongono una attenzione preventiva. Per queste ragioni io ho creduto sempre, che già ai tempi di Nabonassar i Caldei sapessero indicare almeno prossimamente le epoche per cui doveva aspettarsi un'eclisse di Luna, e che ciò facessero col ciclo di 223 lunazioni, da loro a prezzo di lunghe e continuate osservazioni inventato. Una recente scoperta è venuta a confermare ed anzi a estendere questa mia supposizione. Il signor Smith ha decifrato, non è molto tempo, una tavoletta assira, scritta in carattere cuneiforme, della quale il senso è questo: « Al re mio signore, il tuo servo Abil-Istar. La pace protegga il re mio signore, Nebo e Merodach gli siano favorevoli; gli Dei gli concedano lunga vita, salute e contentezza. Rispetto all'eclisse di Luna, per la quale il re mio signore ha inviato nelle città di Akkad, di Borsippa e di Napur, io ho fatto l'osservazione nella città d'Akkad; l'eclisse è avvenuta, e ciò invio al mio signore. Per l'eclisse del Sole, io ho fatto l'osservazione; l'eclisse non è avvenuta, e di ciò pure rendo conto al mio signore. L'eclisse di Luna, che si verificò, ha relazione cogli Hittiti, e significa distruzione per la Fenicia e per i Caldei. Il nostro signore avrà pace, e l'osservazione non indica per lui alcuna disgrazia. La gloria sia col re mio signore ». Apprendiamo da questo importante monumento le seguenti cose, fra molte altre: 1.° Che i Caldei e gli Assiri usavano, prima della caduta dell'impero d'Assiria, predire l'epoca delle eclissi lunari e solari; probabilmente a ciò impiegando il ciclo di 223 lune; 2.° Che le loro regole valevano per la Luna, ma erano soggette a mancare pel Sole, il che indica ignoranza del calcolo delle parallassi: anche Diodoro assicura la stessa cosa nel suo libro secondo; 3.° Che a questi fenomeni gli astronomi e astrologi caldei aveano saputo dar l'importanza di affari di Stato.

IV. Teoria solare d'Eudosso.

Intorno alla teoria solare d'Eudosso, apprendiamo da Aristotele, che essa dipendeva da tre sfere, disposte quasi nello stesso modo che le tre sfere della Luna, una delle quali si moveva secondo la rotazione diurna delle stelle, l'altra secondo lo zodiaco, la terza secondo un circolo collocato obliquamente nella larghezza della fascia zodiacale. Aristotele nota, che l'inclinazione del circolo ora nominato, rispetto al piano dell'eclittica, è pel Sole minore, che per la Luna. Nella sua esposizione, Simplicio, trascrivendo Sosigene, e riferendosi con questo all'opera di Eudosso περὶ ταχῶν, conferma le indicazioni d'Aristotele. Aggiunge poi, che il movimento della terza sfera non si fa (come avviene per la Luna) in senso contrario alla seconda, ma bensì nel medesimo senso (§ 2), cioè secondo l'ordine dei segni; e che tal moto è di gran lunga più lento del moto della seconda sfera. L'insieme di queste notizie mostra abbastanza quale era la natura dei movimenti solari secondo Eudosso; a meglio comprenderla ed illustrarla serviranno le osservazioni che seguono:

In primo luogo dobbiam notare, che circa le velocità delle due sfere interiori è qui caduto Simplicio nel medesimo errore che già abbiamo indicato per la Luna. Se infatti la terza sfera si muovesse, com'egli dice, con moto lentissimo sopra un circolo obliquo rispetto al piano dell'eclittica, è manifesto che il Sole si troverebbe generalmente trasportato in una latitudine boreale od australe; e le sue variazioni in latitudine essendo supposte assai lente, quell'astro nel suo moto annuo non descriverebbe già col suo centro un *circolo massimo*, come Simplicio stesso indica, ma per lo più un circolo minore, parallelo all'eclittica. Questa contraddizione nel rendiconto (del resto molto chiaro ed accurato, se non completo) di Simplicio mostra, che qui, come già vedemmo per il caso della Luna, il moto lentissimo deve attribuirsi alla seconda, non alla terza sfera, e farsi lungo lo zodiaco; e che il moto della terza sfera dee farsi nello spazio di circa un anno (45) *secondo quel circolo massimo ed obliquo, che il Sole sembra descrivere col proprio centro*. Questo circolo massimo, inclinato sull'eclittica di un piccolissimo angolo, viene trasportato con moto diretto dalla seconda sfera intorno all'asse dello zodiaco, ed i suoi nodi sull'eclittica andranno così, come supponeva Eudosso, lentamente avanzando, invece di retrogradare come quelli dell'orbe lunare.

In secondo luogo vediamo, che il movimento annuo del Sole sul suo circolo si presenta qui come perfettamente uniforme. Eudosso dunque respingeva qualunque anomalia del moto solare. Dico *respingeva*, perchè egli non poteva ignorare, che, sessanta o settant'anni prima di lui, Metone ed Eutemone da diligenti osservazioni dei solstizj e degli equinozj avevano messo in evidenza il fatto, allora quasi incredibile, che il Sole non impiega tempi eguali a percorrere i quattro quadranti del suo circolo, compresi fra i punti equinoziali e solstiziali (46). Eudosso quindi dovea necessariamente supporre eguali le durate delle quattro stagioni: di che abbiamo anche un'altra prova diretta. Infatti, in un papiro greco antico, contenente

---

(45) Dico *quasi* un anno, perchè il Sole essendo spinto a procedere in longitudine dalle due ultime sfere, la sua velocità totale è la somma delle velocità speciali delle due sfere. Quindi la velocità nella terza sfera dev'esser alquanto minore di ciò che noi chiamiamo moto medio in longitudine, e la rivoluzione nella terza sfera essere alquanto maggiore di un anno tropico.

(46) Vedi su tale argomento l'art. VII di questa Memoria.

estratti dal calendario d'Eudosso, e conosciuto perciò sotto il nome di *Papiro d'Eudosso* (47), è indicato chiaramente, che Eudosso attribuiva alle quattro stagioni una uniforme durata di 91 giorni, eccettuato l'autunno, a cui assegnava 92 giorni, per aver un totale di 365 giorni in tutto l'anno.

Ma la circostanza più singolare e più degna di notizia, che si presenta nella teoria solare d'Eudosso, è la distinzione che in essa si stabilisce fra il piano fisso dell'eclittica e il piano, ivi supposto mobile, dell'orbita solare annuale. Il piano di quest'orbita si suppone, come quello dell'orbe lunare, inclinato d'un piccolo angolo costante sul piano dell'eclittica; ed ai suoi nodi, cioè alle sue intersezioni coll'eclittica, si deve attribuire, giusta Eudosso, un lento movimento secondo l'ordine dei segni. Gli storici dell'astronomia non hanno prestato sufficiente attenzione a questa ipotesi; da altri non fu interpretata bene, e fu scambiata col fenomeno, assai diverso, della precessione degli equinozj. È dunque importante considerare con qualche esattezza questo punto, per togliere l'oscurità in cui si trova ancora avviluppato. Per agevolezza del discorso daremo al fenomeno il nome di *nutazione dell'orbe solare.*

Simplicio (§ 2) assegna la ragione per la quale Eudosso introdusse la terza sfera del Sole, la quale produce quella nutazione. « *Ad Eudosso*, egli dice, *ed a quelli che furono prima di lui* (48), pareva il Sole moversi di tre movimenti, cioè di quello che segue la rivoluzione delle fisse, di quello che conduce in senso opposto per i dodici segni, e d'un terzo movimento laterale rispetto al circolo mediano dello zodiaco; il qual ultimo fu concluso da questo, che il Sole nei solstizj estivi ed invernali non sorge sempre dal medesimo luogo dell'orizzonte » (49). Apprendiamo da ciò, che già astronomi anteriori ad Eudosso supponevano nel Sole una divagazione nel senso della latitudine, e una variazione dei punti in cui succedono i solstizj e gli equinozj. Cosa che parrà strana a chi oggi studia gli elementi dell'astronomia sui libri, ma che non era strana per nulla in uomini, i quali doveano stabilire col soccorso d'imperfette osservazioni i primissimi fondamenti della scienza. Ai primi astronomi, che si occuparono del movimento dei sette astri erranti, le deviazioni della Luna e dei cinque pianeti minori in latitudine, dovettero manifestarsi assai presto dal paragone immediato colle stelle fisse. Non era dunque per essi nè agevole, nè naturale il supporre, che, unico fra tutti, il Sole non si permettesse alcuna deviazione dal circolo mediano dello zodiaco. Forse il paragone diretto della posizione del Sole con quella delle stelle fisse vicine avrebbe potuto trarli d'inganno; ma questo paragone non era possibile allora. Le osservazioni fatte col gnomone, e la determinazione del punto dove il Sole si leva e tramonta nell'epoche dei solstizj, non erano nè sufficientemente esatte, nè facili a

---

(47) Questo papiro, del quale Boeckh ha fissato con certezza l'epoca nell'intervallo compreso fra gli anni 190-193 avanti Cristo, e che contiene molti dati relativi al calendario, anche di astronomi posteriori ad Eudosso, si conserva al Museo del Louvre a Parigi. Per maggiori informazioni veggasi: BRUNET DE PRESLE, nel vol. XVIII delle *Notices et Extraits de la Bibliothèque du Roi*, parte II; BOECKH, *Ueber die vierjährige Sonnenkreise der Alten;* p. 197-226: LETRONNE, *Journal des Savants*, anno 1839. Estratti, che hanno relazione col presente argomento, furono pubblicati nel greco originale da WACHSMUTH, in calce alla sua edizione del libro *De Ostentis* di Giovanni Lido, pubblicata da Teubner, Lipsia 1863, pp. LIX, e 273-275. Si usa chiamarlo papiro d'Eudosso, perchè contiene scritto a tergo un acrostico di dodici versi, dei quali le lettere iniziali formano le parole Εὐδόξου Τέχνη, *Ars Eudoxi*. Secondo l'opinione di Boeckh e di Mommsen (vedi Boeckh e Wachsmuth nei luoghi citati), questo curioso avanzo dell'antichità sarebbe come uno di quei quaderni, che i Tedeschi chiamano *Collegienhefte*, nei quali gli studenti usano scrivere bene o male quanto voglion ritenere delle lezioni dei professori. Esso è infatti pieno di errori, e redatto senza ordine alcuno.

(48) Εὐδόξῳ *καὶ τοῖς πρὸ αυτοῦ.*

(49) . . . *καὶ γὰρ καὶ τοῦτο κατεἰληπτο ἐκ τοῦ μὴ κατὰ τόν αὖτὸν ἀεὶ τόπον ἐν ταῖς τροπαῖς ταῖς θεριναῖς καὶ χειμεριναῖς ἀνατέλλειν.*

coordinare teoricamente colle osservazioni delle stelle. Con queste ragioni intendiamo perfettamente perchè il mito astronomico della nutazione dell'orbe solare si sia propagato a traverso di tutti i secoli dell'astronomia greca, prima e dopo di Eudosso, siccome or ora diremo.

Stando all'istoria astronomica di Eudemo (che fu contemporaneo ed amico d'Aristotele), il primo a notare una ineguaglianza del corso del Sole sarebbe stato Talete, del quale si narra, che abbia trovato « il giro del Sole rispetto ai solstizj non avvenir sempre in modo uguale » (50). Il che si può intendere tanto di una variazione nel corso del Sole sulla sfera celeste, quanto di una ineguale durata dell'anno; ma forse più propriamente della prima; perchè una ineguale durata dell'anno avrebbe prodotto anomalie nel giro del Sole anche rispetto alle stelle; giro, che al tempo di Talete, e ancora molto dopo, i Greci tutti assumevano come determinatore delle stagioni, dei lavori agricoli, e quindi anche della durata dell'anno. Ora, nel passo d'Eudemo si parla del giro del Sole non rispetto alle stelle, ma rispetto ai punti solstiziali; cose che ai Greci d'allora apparivano distinte, come a noi, sebbene per ragioni assai diverse da quelle che ora noi sappiamo assegnare.

Un altro documento ci prova che l'idea di un moto del Sole in latitudine era divulgata in Grecia non solo prima d'Eudosso, ma anche dopo di lui, e dietro l'autorità di lui. Nel primo libro della sua *Introduzione ai fenomeni d'Arato*, Ipparco cita il seguente passo del Commentario, che, verso il principio del secondo secolo prima di Cristo, Attalo Rodio aveva scritto sul poema Arateo: « Gli Astronomi *sogliono dare* ai tropici, all'equatore ed all'eclittica una « certa larghezza; e dicono, la conversione del Sole non farsi sempre nel medesimo circolo, ma « ora più a settentrione, ora più a mezzodì. Il che conferma Eudosso colle seguenti parole, che « si leggono nell'*Enoptro:* « sembra che il Sole *anch'egli* mostri qualche differenza nei luoghi « delle sue conversioni, ma *molto meno manifesta*, ed affatto piccola » (51). Noi avevamo già appreso da Aristotele, che nella mente d'Eudosso le digressioni del Sole in latitudine erano minori che quelle della Luna; la frase precedente tratta dall'*Enoptro* mostra, che esse erano da lui ritenute come piccolissime, e come appena sensibili all'osservazione. Le espressioni comparative contenute in questa frase si riferiscono senza dubbio alla Luna, di cui Eudosso aveva ragionato prima. Quale fosse veramente l'inclinazione, che all'orbe solare Eudosso attribuiva, non è più possibile indagare; nulla del pari si può sapere intorno al periodo delle rivoluzioni dei nodi dell'orbe solare sull'eclittica (52), e della posizione che a questi nodi si attribuiva in un dato tempo.

Fra gli astronomi, dei quali Attalo dice, che ammettevano la nutazione dell'orbe solare, noi possiamo mettere in prima linea Callippo, il quale, come vedremo, attribuì al corso del Sole anche una sfera, per spiegare il moto in latitudine. Un'opinione la quale aveva a sostenitori

---

(50) Εὔδημος ἱστορεῖ εν ταῖς Ἀστρολογιαις, ὅτι . . . Θαλῆς (εὗρε) ἡλίου ἔκλειψιν καὶ τὴν κατὰ τὰς τροπὰς αὐτοῦ περίοδον, ὡς οὐκ ἴση ἀεὶ συμβαίνει. THEONIS SMYRNAEI, *Astronomia* ediz. MARTIN, p. 324.

(51) . . . . . λέγεται γ' οὖν ἐν τῷ Ἐνόπτρῳ οὕτως. φαίνεται δὲ διαφορὰν τῶν κατὰ τροπὰς τόπων καὶ ὁ ἥλιος ποιούμενος· ἀδηλοτέραν δὲ πολλῷ καὶ παντελῶς ὀλίγην. HIPPARCHI *in Phænomena Arati* nell'*Uranologio* del P. PETAVIO, p. 198. L'*Enoptro* di EUDOSSO era, al pari de' suoi *Fenomeni*, un trattato d'astrognosia, dove insieme colla descrizione delle costellazioni, delle coincidenze del loro levare e tramontare, si trattava dei principali circoli della sfera. L'uno e l'altro hanno formato la base principale del notissimo poema d'Arato.

(52) Da un luogo di Plinio (*Hist.* II, 47) si potrebbe forse argomentare, che il moto dei nodi si facesse in un periodo quadriennale: *Omnium quidem (si libeat observare minimos ambituus) redire easdem vices quadriennio exacto Eudoxus putat, non ventorum modo, verum et reliquarum tempestatum magna ex parte. Et est principium lustri ejus semper intercalario anno caniculæ ortu.*

Eudosso e Callippo, i primi astronomi del loro tempo, dovea facilmente divulgarsi, come ne fa fede il passo di Attalo. Essa trovò un primo e valente contradditore in Ipparco, il quale nell'opera citata ne fa una critica acerba, e forse anche eccessiva. Ipparco nota, che le osservazioni solstiziali fatte al gnomone non manifestano alcun moto del Sole in latitudine, e che le eclissi di Luna calcolate dagli astronomi del suo tempo, senza tener conto di quel moto, verificavano esattamente le predizioni, non differendo la grandezza osservata dalla calcolata, che di due digiti al più, ed anche questo raramente (53). Ciò malgrado, troviamo notizie dell'ipotetica nutazione presso scrittori anche molto più recenti d'Ipparco. Plinio, descrivendo nel secondo libro della *Storia naturale* la diversa inclinazione del corso dei pianeti rispetto all'eclittica (54), così s'esprime rispetto al Sole: « *Sol deinde medio (signifero) fertur inter duas partes flexuoso draconum meatu inæqualis:* » colla qual fantastica combinazion di parole intende dire, che il Sole descrive una linea sinuosa in mezzo allo zodiaco, scostandosi dall'eclittica di un grado da ambe le parti. Questo è reso anche più manifesto dalle parole che vengono dopo: « *Martis stella, quatuor mediis: Iovis media et super eam duabus, Saturni duabus, ut Sol* ». Fra i numerosi autori, dai quali Plinio tolse il materiale pel suo libro secondo, è impossibile indovinare quello, da cui ha potuto aver origine questa notizia.

Ma una teoria completa sulla nutazione dell'orbe solare si trova presso Adrasto Afrodisiense, filosofo peripatetico e matematico, il quale viveva verso la fine del primo secolo, o verso il principio del secondo secolo di Cristo, giusta quanto congettura H. Martin (55). Copiosi estratti di un suo libro sull'astronomia formano la maggior parte del libro di Teone Smirneo, pubblicato nel 1849 dallo stesso Martin con dottissimo apparato letterario, sotto il titolo: *Theonis Smyrnæi Platonici liber de Astronomia,* Parisiis, 1849. Nel capo XII di quest'opera, Teone, seguendo Adrasto, narra dei movimenti che gli astri erranti (il Sole compreso) hanno in latitudine; enumerando poi le digressioni massime di ciascuno dall'eclittica, dice (56): « Il moto del Sole secondo la latitudine nello zodiaco, è affatto piccolo, in tutto una parte sopra 360 ». Con che è da intendersi, la digressione massima del Sole dalle due parti dell'eclittica essere di mezzo grado. E dopo indicate le digressioni degli altri pianeti, prosegue: « Ma la Luna e il Sole si scostano in latitudine dall'eclittica in modo eguale da ambe le parti, ed *in ogni segno* ». Le quali ultime parole accennano al moto dei nodi dell'orbita lunare e solare sopra l'eclittica. Nel capo XXVII poi (57), discorrendo dei periodi in cui la longitudine, la latitudine e la distanza del Sole dalla Terra ritornano ad esser le medesime, dice: « Per il Sole le restituzioni « di longitudine, di latitudine, di distanza, e della così detta anomalia, sono tanto vicine fra « loro, che ai più dei matematici sembrano affatto eguali, cioè di $365\frac{1}{4}$ giorni. Ma quei che « considerano la cosa con maggior esattezza, credono, che il tempo della rivoluzione in lon- « gitudine, cioè del ritorno del Sole da un punto al medesimo punto, da un solstizio al

---

(53) Hipparchi, *in Phæn. Arati*, p. 198-199 dell'*Uranologio*. Questa testimonianza non sospetta è passata probabilmente inavvertita da coloro, i quali sostengono, che prima d'Ipparco non v'era astronomia in Grecia.

(54) Plinii, *Hist. Mundi*, lib. II, c. 16.

(55) H. Martin, *Dissertatio de Theonis Smyrnaei astronomia*, premessa all'edizione qui sopra citata di Teone, p. 74. Teone sembra fosse di poco ad Adrasto posteriore.

(56) Theonis, *Astr.*, ediz. Martin, p. 174.

(57) *Ibid.*, p. 260-262. Nei numeri $365\frac{1}{4}$ $365\frac{1}{2}$ e $365\frac{1}{8}$, il codice greco parigino impiegato da H. Martin per la sua edizione, conteneva alcuni errori, sulla cui evidente rettificazione H. Martin non ha alcun dubbio. I medesimi errori si trovano *ad unguem* ripetuti nei due codici, che dell'astronomia di Teone possiede la Biblioteca Ambrosiana di Milano, siccome ebbe la cortesia di verificare per me il degnissimo suo bibliotecario Antonio Ceriani.

« medesimo solstizio, o da un equinozio al medesimo equinozio, sia circa quello che abbiamo « già detto (365 $^1/_4$ giorni); onde avviene che il Sole dopo quattro anni ritorna alla medesima « longitudine nella medesima ora del giorno. Il tempo della restituzione d'anomalia, durante « il quale ritorna alla massima od alla minima distanza dalla Terra, alla massima od alla « minima velocità apparente, alla massima od alla minima grandezza apparente, credono « esser di giorni circa 365 $^1/_2$; e dopo due anni ritornare il Sole ad esser da noi egualmente « distante alla medesima ora del giorno. E il tempo della restituzione secondo la latitudine, « cioè quello in cui dal punto più australe o più boreale (58) ritorna al medesimo punto in « modo da produrre di nuovo ombre identiche coi medesimi gnomoni, credono essere di 365 $^1/_8$ « giorni; e il Sole dopo otto anni di nuovo trovarsi avere la medesima latitudine alla me« desima ora del giorno ». Finalmente, nel capo XXXVIII (59), si trova quanto segue: « Il « circolo del Sole sembra percorrere quasi la medesima via che l'eclittica; però con alquanta « inclinazione, in modo da dipartirsi dall'eclittica di circa mezzo grado da ambe le parti ».

Ecco dunque sulla nutazione dell'orbe solare un insieme di idee ben definite e di dati numerici, che certamente non deriva da Teone, nè da Adrasto, ma da qualche astronomo anteriore ad ambidue. Il polo dell'orbe solare mobile dista qui *mezzo grado* dal polo fisso dell'eclittica; e il primo si avvolge intorno al secondo, descrivendo un piccolo circolo di un grado di diametro. La velocità di questo movimento poi è tale, che mentre il Sole impiega 365 $^1/_4$ giorni a descrivere tutta la longitudine di 360, per ritornare al medesimo punto della sua orbita mobile gli bastano 365 $^1/_8$ giorni; dal che consegue, che il moto di quell'orbita è *retrogrado*, e che si compie in tanti anni, quante volte la differenza dei due periodi, cioè $^1/_8$ di giorno, sta in 365 $^1/_4$ giorni; dunque *in* 2922 *anni*.

Le conseguenze geometriche di queste ipotesi sono agevoli a vedere. Sia (fig. 1), sulla sfera celeste, P il polo dell'equatore, E quello dell'eclittica, l'arco PE l'obliquità; $abcd$ rappresenti il piccolo circolo di diametro $ab=1^\circ$ descritto dal polo dell'orbe solare in 2922 anni nel senso indicato dalla saetta, contrariamente all'ordine dei segni. Trovandosi ad un istante qualunque questo polo in m, sarà in quell'istante Pm l'inclinazione nell'orbe solare rispetto all'equatore celeste, e la direzione dell'arco Pm sarà in pari tempo quella del coluro dei solstizj, la direzione perpendicolare $P\mu$ quella del coluro equinoziale. La massima inclinazione dell'orbe solare sull'equatore sarà Pb, la minima Pa, e la sua variazione lentissima dal massimo al minimo sarà di un grado (60). La direzione dei coluri avrà poi intorno a P un moto libratorio, di cui i limiti saranno (pel coluro solstiziale) le direzioni Pc, Pd, e l'ampiezza totale sarà l'angolo cPd. Posto $PE=24^\circ$, si ha l'angolo $cPd=2^\circ\,28'$; e tale sarà pure l'ampiezza del moto oscillatorio dei punti equinoziali sull'equatore (61). La massima velocità di questi punti corrisponderà alla posizione a del polo dell'orbe solare; in tal circostanza gli equinozj avanzeranno di 9'' 71 sull'equatore ogni anno. Un altro massimo corrisponde ad un moto retrogrado degli equinozj, quando il polo dell'orbe solare è in b: la retrogradazione

(58) Intendansi queste espressioni rispetto alla latitudine, e non rispetto alla declinazione.

(59) THEONIS, *Astr.*, ed. Martin, p. 314.

(60) Non è dunque geometricamente, ma solo prossimamente vero quanto dicono Adrasto e Teone, che in capo a 365 $^1/_8$ giorni *le ombre degli stessi gnomoni tornano ad essere identiche:* infatti, in tale intervallo l'obliquità del circolo solare rispetto all'equatore ha potuto cambiare, secondo questa teoria, di una piccola quantità.

(61) Non è dunque geometricamente, ma solo prossimamente esatto quanto dicono Adrasto e Teone, che in capo a 365 $^1/_4$ giorni il Sole ritorna da un equinozio al medesimo equinozio; perchè frattanto i punti equinoziali, in forza del loro moto libratorio, si saranno spostati di una piccola quantità.

annua sull'equatore è allora di 9″ 33. Da questo appare, che le supposizioni riferite da Teone non sono state immaginate, come alcuno potrebbe forse sospettare, per dare una spiegazione del moto dei punti equinoziali scoperti da Ipparco. Questo moto infatti è uniforme ed assai più celere, ed importava, secondo Ipparco, 36″ annui lungo l'eclittica; onde, volendo trasportarlo sull'equatore (supporre cioè che l'eclittica si muova lungo l'equatore), rimane ancora di 33″.

Non è facile dire a quale degli antichi astronomi appartenga la teoria precedente. Le durate $365\frac{1}{8}$, $365\frac{1}{4}$, $365\frac{1}{2}$ assegnate per le restituzioni di latitudine, di longitudine e di anomalia sembrano calcolate nello scopo di ricondurre la medesima posizione del Sole alla medesima ora in capo ad otto anni, siccome espressamente nota Teone. Pare dunque che queste determinazioni siano coordinate al celebre periodo dell'*ottaeteride*, il quale, prima che Metone pubblicasse il suo aureo ciclo di 19 anni, serviva ai Greci per connettere alla meglio il loro calendario col moto del Sole e della Luna. Parecchi astronomi si occuparono di questo periodo, anche dopo l'invenzione di Metone; fra essi sono nominati Eudosso, Arpalo, Nautele, Mnesistrato, Dositeo ed Eratostene. Ad Eudosso non si può certamente ascrivere la teoria precedente; prima, perchè il moto dei nodi solari secondo lui è *diretto*, mentre qui appare *retrogrado:* secondo, perchè da Plinio apprendiamo (vedi la nota (52)) che le variazioni dei fenomeni erano da lui messe in relazione con un ciclo quadriennale, non con un'ottaeteride. Sembra anzi, che l'*ottaeteride* attribuita ad Eudosso fosse opera di altro autore, forse di Dositeo (62), amico e contemporaneo d'Archimede. Nè certamente si potrà pensare di fare Eratostene autore della nutazione solare citata da Adrasto e da Teone, essendo abbastanza certo, che Eratostene supponeva fissa e costante l'obliquità dell'eclittica.

In ogni caso il fatto, che astronomi come Dositeo ed Eratostene, si occuparono ancora dell'ottaeteride dopo le invenzioni di Metone e di Callippo, dimostra, che quel ciclo, il quale aveva perduto ogni opportunità come sistema di lune intercalari, conservava però qualche importanza d'altro genere; ed è difficile immaginarne un'altra, che non derivasse dalle restituzioni di certi periodi relativi al Sole. Ma più oltre non è possibile procedere in questa indagine.

Qualche altra luce sulla storia della nutazione solare ci porge Marziano Capella, il quale trascrivendo, a quanto sembra, il libro dell'*Astronomia* di Terenzio Varrone, dice quel che segue sul movimento dei pianeti in latitudine (63): *Alia (sidera) per tres (latitudinis) partes deferuntur: alia per quatuor: alia per quinque: alia per octo: quœdam per omnes duodecim deferuntur. Sol in nullam excedens partem in medio libramento fertur absque ipso Libræ confinio. Nam ibi se aut in Austrum Aquilonemque deflectit ad dimidium fere momentum.* Il Sole dunque seguirebbe esattamente l'eclittica nel suo corso annuale, eccetto che nel segno della Libra, dove ha luogo una deviazione di circa mezzo grado verso mezzodì o verso settentrione! Evidentemente questa notizia del compilatore africano, passando di penna in penna, divenne corrotta ed inintelligibile. Il senso primitivo era forse questo: che il Sole non si scosta mai in modo sensibile dall'eclittica, e che soltanto nella Libra (e nell'Ariete per conseguenza) la sua latitudine arriva a mezzo grado. Con questa interpretazione noi acquistiamo la notizia, che i nodi dell'orbita solare si supponevano, dagli autori primitivi di questi dati, coincidere coi punti solstiziali, e le massime digressioni del Sole in latitudine coi punti

(62) V. IDELER, *Ueber Eudoxus*. Mem. di Berlino, 1830, p. 61-62.

(63) MARTIANI CAPELLÆ, *De Nuptiis Philologiæ et Mercurii*, lib. VIII.

equinoziali (64). E tal congettura acquista vie maggior peso dal fatto, che una indicazione interamente parallela a quella di Marziano Capella, e nondimeno procedente da fonte diversa, si trova in un trattato latino: *De Mundi cœlestis terrestrisque constitutione*, il quale va stampato fra le opere del venerabile Beda, e viene a lui attribuito, sebbene l'epoca della sua composizione sia, per indizj manifesti, posteriore a Carlo Magno (65). In questo scritto si legge: *Sol duas medias (zodiaci partes) servat, nec illas, nisi in Libra, excedit* (66). Si ha dunque qui una escursione di due gradi in latitudine, come quella a cui accenna Plinio; anche le escursioni degli altri pianeti, accennate in quell'opuscolo, coincidono meglio con quelle date da Plinio, che con quelle degli altri autori (67). Pur tuttavia in questa tradizione, che è diversa da quella seguita da Marziano Capella, si collòca nella Libra la massima digressione del Sole dall'eclittica, come fa Marziano. Da questo sembra si possa concludere con qualche probabilità, che i diversi astronomi, ai quali piacque ammettere la nutazione dell'orbe solare, differivano circa l'ampiezza di questa nutazione, ma si accordavano però a collocare al loro tempo nella Libra il luogo (od uno dei luoghi) della massima digressione del Sole dall'eclittica.

In tale supposizione i nodi dell'orbe solare sull'eclittica coincidevano coi solstizj, o non erano molto distanti. Una considerazione attenta della figura prima mostra che in tal circostanza il movimento del coluro equinoziale era nullo o quasi nullo: il che conferma quanto già sopra abbiamo dimostrato, che l'ipotesi della nutazione solare non fu creata per dar spiegazione di un movimento dei punti equinoziali. Eudosso, Teone, Plinio, Marziano Capella, il falso Beda non conoscono affatto la precessione. All'opposto, la coincidenza dei nodi solari

---

(64) Ho qualche ragione di credere, che per le notizie sul moto del Sole in latitudine, Teone Smirneo (o Adrasto), e Marziano Capella (o Terenzio Varrone che fornì quasi tutta la materia del libro VIII al compilatore africano) rappresentino una medesima fonte: infatti, non solo ambidue si accordano ad assegnare al Sole la digressione di un mezzo grado; ma *tutte le digressioni dei singoli pianeti in latitudine da essi assegnate sono identiche*, e ad un tempo più o meno diverse da quelle che si trovano indicate in Plinio ed in Cleomede. A ciò si aggiungano altri notevoli parallelismi, per esempio il trovarsi in ambidue gli autori la notizia del moto eliocentrico di Venere e di Mercurio. Se così sta veramente la cosa, e se le tradizioni conservate da Marziano e da Teone derivano da una medesima radice, possiamo dire che la notizia data da Marziano sul luogo dei nodi solari serve a completare l'esposizione di Teone, dove appunto questa notizia manca.

(65) Bedae *presbyteri Anglo-Saxonis opera*. Coloniæ 1612, vol. I, p. 323-344. In tre luoghi, p. 329, 331, 332, si cita l'*Historia Caroli* o le *Gesta Caroli*. A p. 324 poi è citato Beda stesso. Di Beda consta che nascesse nell'anno 671: è dunque impossibile che abbia vissuto con Carlo Magno. Inoltre, nel catalogo delle sue opere, da lui redatto nel 59° anno dell'età sua (vedi la *Vita di Beda* che precede l'edizione succitata di Colonia), non si trova indicato il libro de *Mundi Cœlestis terrestrisque constitutione*. Beda morì poco dopo l'epoca del suddetto catalogo, a quanto pare, nel 731 o nel 733. Le citazioni relative alla Storia di Carlo Magno si trovano effettivamente negli annali dei Carolingi, sotto gli anni 798 e 807. Si raffrontino quelle citazioni cogli *Annales Bertiniani* presso Muratori, *Rerum Italicarum Scriptores*, vol. II, p. 504 e 506. Si conclude, che il trattato in questione non può risalire al di là del secolo IX, ed è posteriore a Beda almeno di un secolo.

(66) Bedæ *opp.* vol. I, p. 329.

(67) Plinii *Hist. nat.* II. Ecco il paragone delle escursioni totali in latitudine dei sette astri erranti, secondo Cleomede (C), Marziano (M), Teone (T), Plinio (P), e il falso Beda (B). I numeri di Cleomede possono considerarsi anche come rappresentanti l'opinione di Posidonio, e si trovano nella *Teoria ciclica*, libro II, cap. 7.

Pianeti	C	M	T	P	B
☽	10+	12	12	12	12
☉	0	1	1	2	2
☿	8	8	8	8	8
♀	10	12	12	14	14
♂	5	5	5	4	4
♃	5	5	5	3	5
♄	2	3	3	2	3

Ove si vede la perfetta identità dei dati di Marziano e di Teone, a cui ho fatto allusione nella nota (64).

coi punti solstiziali produce una variazione comparativamente rapida dell' obliquità del circolo solare, la quale nelle supposizioni numeriche riferite da Teone Smirneo, importerebbe circa 4″ ogni anno. Di siffatta variazione dell' obliquità, adunque, gli antichi inventori di questa ipotesi avrebbero creduto potersi convincere col mezzo delle osservazioni del gnomone, o del luogo dove sorge sull'orizzonte il Sole solstiziale.

Prima di abbandonare questo curioso soggetto, è mio dovere di notare, che Bailly ha interpretato il movimento della terza sfera solare di Eudosso (68), come un indizio, che a quei tempi già si avesse un'idea della variazione dell' obliquità dell' eclittica; seguendo poi le idee del secolo scorso, congettura che Eudosso avesse potuto imparare in Egitto questa nozione. Ma allorquando si pensa, che la variazione dell' obliquità suddetta non arriva a mezzo secondo in un anno, e richiede quindi 7200 anni per sommare ad un grado; e quando si riflette, che ai tempi d'Eudosso l'ampiezza di un grado ancora si confondeva fra gli errori di osservazione, non saremo troppo disposti a concedere all' opinione di Bailly molta probabilità. Malgrado la diligenza degli osservatori Alessandrini e quella degli Arabi e degli Europei, l' obliquità dell'eclittica fu ritenuta come costante ancora ai tempi di Ticone, e non sono ancora 200 anni da che la sua diminuzione è generalmente ricevuta dagli astronomi.

Con maggior apparenza di verità, il professore Lepsius, nella sua classica opera *Sulla cronologia degli Egiziani* (69), ha interpretato il movimento della terza sfera solare di Eudosso come un indizio, che Eudosso già avesse cognizione della precessione degli equinozj, e che l'avesse imparata dagli Egiziani. Escludendo per ora gli Egiziani da questo discorso, io esaminerò soltanto la parte che concerne Eudosso, e porrò la questione: 1.° la terza sfera solare d' Eudosso può interpretarsi in un senso consentaneo ad un movimento di precessione? 2.° si ha nel sistema d' Eudosso qualche argomento decisivo per attribuirgliene o per negargliene la cognizione?

Relativamente alla prima di queste due questioni, sembra che le ricerche precedenti non possano lasciare il minimo dubbio. Infatti le testimonianze di Aristotele, di Attalo Rodio e di Simplicio, che qui sopra abbiamo addotto, si accordano perfettamente fra loro. Inoltre, per quanto riguarda Aristotele e Simplicio, pare che non vi possa esser dubbio circa alla loro esattezza e credibilità. Aristotele, come vedremo, si occupò in modo affatto speciale delle sfere omocentriche, ed Eudemo, il quale ha fornito tutte queste notizie a Simplicio, ne parlò distesamente nella sua *Storia dell'astronomia*. Ambidue erano in relazione con Callippo, il riformatore del sistema; ed il libro di Eudosso περὶ ταχῶν era ancora nelle loro mani. L'interpretazione più naturale e più semplice delle loro relazioni conduce senza alcuna dubbiezza all'ipotesi della nutazione dell' orbe solare. Questa poi non compare qui come fatto isolato nella storia dell'astronomia; ma si trova adottata e modificata anche presso altri astronomi, di cui Plinio, Teone, Marziano Capella, e il falso Beda ci apportarono le tradizioni con maggiore o minore esattezza.

Lepsius, prendendo in esame la terza sfera solare d' Eudosso, discute anch' egli le testimonianze di Attalo, di Aristotele e di Simplicio, e consacra una serie di sottili ricerche ad investigare se i loro testi, con qualche lata interpretazione, consentano che s'introduca la precessione invece della nutazione così chiaramente indicata. Dopo varj inutili tentativi, egli riconosce, che un indizio di precessione non si può supporre, senza attribuire a quei testi un

---

(68) Bailly, *Histoire de l'Astronomie ancienne*, pag. 242. Paris, 1775.

(69) Lepsius, *Chronologie der alten Aegypter*, Berlin, 1849, p. 196-210.

senso improbabile, o senza contraddire direttamente ai medesimi, o senza supporre che gli spositori della costruzione d'Eudosso non l'abbiano ben capita (p. 201-204). Ripugna tuttavia al dotto egiptologo l'ammettere, che Eudosso abbia potuto attribuire al Sole un movimento affatto immaginario (p. 204), e creare una sfera appositamente per ispiegarlo. Credo che questa ripugnanza gli sarebbe sembrata minore, se nel fare queste ricerche egli avesse tenuto sott'occhio quello che del medesimo movimento immaginario lasciarono scritto Teone, Plinio, Capella ed il falso Beda; i quali provano, che, in un certo tempo e presso una certa scuola di astronomi, la nutazione dell'orbita solare fu riguardata come una parte essenziale della teoria di questo astro.

Un'altra difficoltà ad ammettere la nutazione solare presso Eudosso egli trova nelle critiche, con cui Ipparco accompagna la citazione del testo più volte nominato di Attalo (70). Ora in questo luogo Ipparco confuta l'opinione di Attalo, che i circoli celesti possano avere una larghezza finita, e ciò fa con ragioni astronomiche. Parimenti dimostra, con varie citazioni di Arato, che questo poeta non aveva quell'opinione. Ma che da tali ragionamenti di Ipparco risulti qualche cosa relativamente ad Eudosso, come tenta mostrare il Lepsius (p. 204), è quanto non saprei vedere. La teoria della nutazione solare non implica alcuna larghezza finita dell'eclittica, come non l'implica il movimento della Luna e degli altri pianeti in latitudine. In essa teoria il circolo descritto dal Sole è un circolo matematico, sebbene mobile di posizione. Onde, dato pure che Attalo citasse a torto Eudosso come fautore della larghezza finita dei circoli celesti, nulla ne deriverebbe, nè pro nè contro, nella questione che ci occupa.

Lepsius non può credere, che Eudosso abbia voluto introdurre una sfera per ispiegare una aberrazione così poco sensibile, com'è quella a cui accennano le parole dell'*Enoptro*, mentre altre ineguaglianze assai più rilevanti furono da lui neglette. Ma dal momento che Eudosso ammetteva una deviazione del Sole dall'eclittica, questa deviazione, grande o piccola, reale od immaginaria che fosse, egli era obbligato a comprenderla nelle sue ipotesi matematiche. Altre assai maggiori ineguaglianze (p. e. l'eccentricità dell'orbe lunare) non furono da lui introdotte, perchè le osservazioni imperfettissime di quel tempo non le aveano ancor manifestate. Nella storia dell'astronomia occorrono molti esempj consimili di minuzie puramente immaginarie tenute in calcolo, mentre si negligevano fenomeni reali, di molta maggior entità. Addurrò soltanto la *trepidazione delle fisse* e la *nutazione dell'asse terrestre*, secondo Copernico.

Ponderata ogni cosa, sembra al professor Lepsius che la minor somma di difficoltà stia nella supposizione, che Eudosso abbia ricevuto dall'Egitto la precessione non solo, ma anche la teoria delle sfere omocentriche; che nello studiarla egli non si sia reso conto esatto delle funzioni della terza sfera solare, la quale gli Egiziani avrebbero appunto incaricato di produrre la precessione; e che Eudosso medesimo, o gli spositori delle sue dottrine, abbiano finito per assimilarla alla terza sfera della Luna, attribuendole movimento e posizione analoga. Con che sarebbe nata l'idea della nutazione dell'orbe solare. Ecco a un dipresso le ragioni principali cui appoggia questa congettura.

Eudosso, ci assicura Seneca, fu il primo a trasportare dall'Egitto in Grecia la notizia dei movimenti planetarj (71). Diodoro afferma, che gli Egiziani da tempo immemorabile osservavano questi movimenti, e che con ispeciale esattezza ne notavano i periodi, le stazioni

---

(70) PETAVII, *Uranologion*, p. 199.

(71) Vedi sopra nota (21).

e le retrogradazioni (72). Aristotele assicura, all'occasione di una occultazione di Marte da lui veduta, che di simili annotazioni su tutti i pianeti si potevano trovare nelle antiche osservazioni degli Egiziani e dei Babilonesi (73). Si può dunque riguardare come verosimile, che Eudosso traesse dall' Egitto le cognizioni astronomiche positive, che formano la base del sistema delle sfere. Anzi, osservando che in certi monumenti egiziani (74) si trovano le figure della dea del cielo ripetute l'una dentro dell'altra e concentricamente e similmente disposte, Lepsius crede di vedere in quelle null'altro che una rappresentazione simbolica delle sfere omocentriche del cielo (p. 199), e ne trae argomento per credere, che Eudosso sia stato preceduto dagli Egiziani nell' ideare il suo sistema. A ciò sembra alludere anche Simplicio, quando dice (§ 2), che « ad Eudosso, e *a quelli che furono prima di lui*, il Sole pareva moversi di *tre* movimenti. » Congetturando che i predecessori d' Eudosso siano i sacerdoti d' Egitto, Lepsius tiene per verosimile, che nel terzo di quei movimenti sia da ravvisare la precessione, e che Eudosso non trovando questo movimento confermato dalle osservazioni a lui conosciute, non abbia inteso bene i suoi maestri, e supposto in quella vece un movimento che non esiste, cioè la nutazione dell'orbe solare. Nè contento di accennare in modo generale a questo possibile errore dell' astronomo di Cnido, Lepsius cerca ancora di mostrare qual posizione e movimento avevano potuto dare gli Egiziani alla supposta sfera della precessione.

Egli comincia dallo stabilire, che se Eudosso e gli Egiziani conobbero una precessione, questa dovette consistere in un moto dell' eclittica lungo l'equatore, non già, come l'intendiamo noi, dell'equatore lungo l'eclittica (75). Il movimento dell'equatore e dei poli dell'asse del mondo, come oggi si conosce, era una supposizione troppo lontana dalle idee dell' antichità, per la quale i poli dell' equatore erano il sostegno incrollabile di tutto l'universo. Era questa dunque degli Egiziani una specie di *precessione equatoriale*, in cui i poli dell'eclittica si supponevano girare intorno ai poli dell' equatore in un periodo, al quale, dietro diverse indicazioni degli autori, Lepsius assegna una durata di 36000 anni (76). Perciò egli dà alle supposte sfere degli Egiziani la seguente disposizione. Prima e più esterna, la sfera del moto diurno intorno ai poli immobili del mondo. Alla seconda sfera attribuisce il moto annuo del Sole per l'eclittica intorno ai poli di questo circolo. Alla terza sfera assegna i medesimi poli che alla prima, ed un lentissimo moto retrogrado in 36,000 anni, e crede che essa valga a produrre la precessione equatoriale di cui sopra. E questa egli reputa analoga alla terza sfera lunare d' Eudosso. Ma è facile convincersi, che in questo modo non si raggiunge lo scopo prefisso. Infatti i poli della terza sfera essendo fissati sulla seconda, partecipano al movimento di questa, e sono aggirati ogni anno intorno ai poli dello zodiaco. Se quindi, in un dato istante, i poli della terza sfera coincidevano con quelli del mondo, dopo sei mesi ne saranno lontani di quasi 48 gradi, cioè di quanto importa il doppio dell'obliquità del-

---

(72) Diodoro, I, 81.

(73) Aristot. *De Cœlo* II, 12.

(74) Per esempio, nel tempio di Dendera in vicinanza del famoso zodiaco circolare, nel tempio di File, e in quello d'Hermonthis. Vedi Denon, *Viaggio nell'alto e nel basso Egitto*, tav. 130.

(75) L' interpretazione della precessione al modo d'Ipparco, come un moto della sfera stellata intorno ai poli dell'eclittica supposta fissa come l'equatore, non può qui entrare in calcolo; perchè alla sfera delle fisse Eudosso attribuiva un solo movimento, come fecero tutti gli antichi prima del grande astronomo di Nicea.

(76) Per effetto della precessione, le stelle dell'equatore cambiano la loro ascensione retta, secondo le formule moderne, di 46″ all'anno; tanto dunque è l' importo della precessione apparente rispetto all'equatore. Ciò darebbe una rivoluzione intiera in 28170 anni.

l' eclittica. E l' effetto della terza sfera sarà, non di produrre una precessione equatoriale, ma di portare il Sole successivamente in latitudini sempre maggiori, e di allontanarlo col tempo dal circolo dell' eclittica fin quasi a 24°.

Si può anzi dimostrare, che con nessuna disposizione di tre sfere diversamente fra loro inclinate è possibile ottenere una precessione equatoriale, se non quando si scambino di luogo la seconda e la terza sfera di Lepsius, attribuendo alla prima e più esterna il moto diurno intorno all' asse del mondo; alla seconda il moto precessionale *intorno al medesimo asse* e nel medesimo senso; alla terza il moto annuo intorno all'asse dell'eclittica. Ma è palese, che l'effetto delle due prime sfere, le quali si aggirano intorno all'asse del mondo, può esser prodotto da una sola, dando a questa lo stesso asse, e una velocità eguale alla somma delle due velocità di quelle. Se dunque veramente Eudosso, che era valente geometra, o gli Egiziani, avessero voluto introdurre la precessione nella loro teoria del Sole, l'avrebbero composta di due sfere sole. Alla prima di esse avrebbero assegnato un movimento intorno all' asse delle fisse, e con una velocità uguale a quella delle fisse, sommata con quella del moto precessionale; alla seconda un movimento intorno all' asse dello zodiaco secondo l' ordine dei segni, con periodo uguale all' anno tropico.

Poichè Eudosso non adottò tale combinazione di due sfere, che sola poteva produrre la precessione equatoriale, dobbiamo considerare come certo, che *la terza delle sue sfere solari indica qualche altra cosa che la precessione;* e quest'altra cosa è la nutazione dell' orbe solare. E poichè egli attribuì alla prima delle sfere del Sole una velocità esattamente uguale a quella delle stelle, dobbiamo concludere, che egli *non ebbe alcuna idea di una precessione intorno al polo dell'equatore*, della quale gli sarebbe stato facilissimo dar conto solo col modificare lievemente la velocità della sua prima sfera. E con questo si è risposto ad ambedue le questioni enunziate in principio.

Per quanto riguarda l'origine egiziana delle sfere omocentriche, essa sembra appartenere a quegli argomenti, di cui l'affermazione è altrettanto destituita di prove, che la negazione. Nel secondo articolo di questa Memoria si è cercato di far vedere, come il sistema d'Eudosso si connetta al progresso precedente dei Greci nelle idee sulla struttura del mondo. Un intervento d'idee straniere non sembra qui necessario; non voglio però negarne la possibilità. Anche mi guarderò dal contestare la bellissima interpretazione data dal Lepsius sulle figure concentriche della dea celeste, rappresentata su certi monumenti egiziani, nelle quali egli ravvisa l'idea delle sfere; non è da tacer tuttavia, che i templi di Tentira, di File e di Hermonthis, dove queste figure stanno scolpite, sono tutti dell'epoca greca e romana, quindi posteriori ad Eudosso di più secoli.

Cade così, colla precessione d'Eudosso, uno dei principali argomenti, a cui si poteva appoggiare la cognizione della precessione presso gli Egiziani. Dell'altro argomento capitale, che si deduce dal loro calendario, e che non è connesso colle sfere d'Eudosso, non è questo il luogo opportuno di trattare (77).

---

(77) La grand' opera di Lepsius, *Chronologie der Alten Aegypter*, è il solo libro dove si possano trovare notizie esatte e copiose sull'astronomia degli Egiziani, esaminata col sussidio dei monumenti. Il profondo rispetto che la lettura della medesima mi ha inspirato, per la molteplice dottrina, e per la sagacità del suo autore, mi ha indotto a non esporre opinioni diverse dalle sue, senza addurne, anche con qualche prolissità, le ragioni migliori che per me si potesse.

Io aveva anche scritto, come appendice alla presente Memoria, una ricerca sulla relazione del calendario degli antichi Egiziani col fenomeno della precessione, dalla quale riusciva a concludere, che nulla di quanto sappiamo intorno a tale calendario

V. L'IPPOPEDA D'EUDOSSO. MECCANISMO DELLE STAZIONI E DELLE RETROGRADAZIONI.

Prima di entrare a discorrere delle teorie speciali, con cui Eudosso spiegava i movimenti di ciascun pianeta, è necessario spendere qualche parola intorno ai caratteri generali comuni a tutte queste teorie, e studiare con qualche cura il singolare e fin qui poco conosciuto meccanismo da lui impiegato per rappresentare l'anomalia solare dei pianeti, cioè quella massima irregolarità del loro corso, di cui gli effetti più salienti sono i noti fenomeni delle stazioni e delle retrogradazioni.

Leggendo le relative esposizioni di Aristotele e di Simplicio (per il primo vedi l'appendice I e per il secondo l'appendice II §§ 4, 5 e 6) vediamo, che delle quattro sfere assegnate a ciascun pianeta, alla prima e più esterna era affidata la missione di produrre il moto diurno, con rivoluzione uguale a quella delle stelle fisse; la seconda serviva a produrre la rivoluzione dei pianeti lungo l'eclittica in un periodo uguale a quello della loro rivoluzione zodiacale, la quale per i pianeti superiori coincide colla nostra rivoluzione siderale, per Mercurio e per Venere è uguale ad un anno in tutti i sistemi geocentrici d'astronomia. La rivoluzione di queste seconde sfere essendo supposta uniforme, chiaro è che Eudosso non aveva alcuna idea dell'anomalia zodiacale dei pianeti, cioè di quella che dipende dalla eccentricità delle loro orbite, ed alla quale più tardi fu provvisto coll'introduzione degli eccentri fissi. Per Eudosso dunque erano equidistanti sull'eclittica i punti delle successive congiunzioni e delle successive opposizioni; e gli archi di retrogradazione erano da lui per ciascun pianeta supposti costanti ed uguali in tutte le parti dello zodiaco. E non solo delle eccentricità delle orbite planetarie, ma anche delle loro inclinazioni rispetto all'eclittica non si trova indicato il minimo cenno. Il movimento delle seconde sfere (se bene siamo informati) coincideva per tutti i pianeti col circolo dello zodiaco. Le digressioni dei pianeti in latitudine non erano restate ignote agli osservatori; ma Eudosso, come più tardi si vedrà, credette che queste seguissero i periodi dell'anomalia solare, e che dipendessero esclusivamente dall'elongazione dei pianeti dal Sole, non dalla loro posizione in longitudine.

A rappresentare l'anomalia solare e insieme il loro movimento in latitudine erano destinate per ciascun pianeta una terza ed una quarta sfera, interiori alle due sopraccennate. La terza sfera aveva i poli fissi sopra due punti opposti del circolo zodiacale tracciato sulla superficie della seconda, e si aggirava intorno a questi poli con un periodo uguale a quello della restituzione sinodica, ossia dell'intervallo che corre fra due opposizioni consecutive, o fra due congiunzioni consecutive del medesimo nome. I poli della terza sfera, dice Aristotele, erano diversi per i diversi pianeti, ma identici per Venere e per Mercurio. Circa il senso della rota-

---

ci autorizza a pronunziare, ch'essi conoscessero quel fenomeno. Ma, dopo scritta la presente Memoria, essendomi venuta sott'occhio la dotta e profonda Memoria di H. MARTIN (presentata nel 1864 all'Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere, e stampata, nel 1869, nel vol. VIII dei *Sav. Étran.*), in cui tratta la quistione, se la precessione sia stata conosciuta dagli Egiziani o da altri popoli prima d'Ipparco, vi trovai la stessa cosa dimostrata con tanta maggior efficacia e copia d'argomenti, che fui indotto a sopprimere la mia appendice, la cui indole del resto era anche troppo aliena dall'oggetto di questo mio scritto. In quella stessa Memoria trovai che Martin aveva già trattato della supposta nozione della precessione attribuita ad Eudosso, ed era pure giunto precisamente alle mie conclusioni. Ma la via da me battuta non essendo intieramente identica alla sua, ho conservato senza variazioni questa parte del mio lavoro, la quale del resto era necessaria per formare sulle ipotesi astronomiche d'Eudosso una monografia completa.

zione di questa terza sfera, Simplicio aggiunge, che essa si muoveva da settentrione a mezzo dì e da mezzodì a settentrione, ciò che è una conseguenza del giacere il suo asse nel piano zodiacale. Egli però non determina in quale dei due versi possibili succedesse la rotazione; dalle cose seguenti apparirà la cosa esser indifferente, ed i fenomeni esser rappresentati ugualmente nell'una o nell'altra supposizione.

Sulla superficie della terza sfera così disposta erano infissi i poli della quarta, e l'asse di questa serbava sull'asse della precedente una inclinazione costante, ma diversa per i diversi pianeti. Ed intorno a questo asse s'aggirava la quarta sfera in un periodo uguale a quello della terza, ma in senso contrario; e finalmente sull'equatore della quarta sfera era infisso il pianeta, che riusciva così a moversi di un movimento diurno, di una rivoluzione zodiacale, e di due altri movimenti regolati secondo il periodo sinodico. La combinazione di questi due ultimi movimenti disposti in senso contrario intorno a due assi obliqui fra loro, l'uno girevole intorno all'altro, costituiva la base del meccanismo, con cui Eudosso produceva simultaneamente il moto dell'anomalia solare, le stazioni, le retrogradazioni e le digressioni in latitudine.

Astraendo per ora dall'azione delle due prime sfere, che è facile ad immaginare, rivolgeremo tutta la nostra attenzione a studiare a parte il movimento che risulta nel pianeta dalle due ultime. La questione, ridotta ai termini più semplici, è questa: « Intorno al diametro AB (fig. 2) fisso, si aggira con moto uniforme una sfera portante due poli opposti P, intorno ai quali si avvolge uniformemente una seconda sfera concentrica alla prima, con periodo eguale e con movimento contrario. Determinare la via percorsa da un punto M della seconda sfera, collocato ad eguale distanza da' suoi poli. »

Questo problema non offre oggi certamente alcuna difficoltà a chi sia iniziato nei principj della trigonometria sferica o della geometria analitica. Ma ciò che nel presente caso importa, non è tànto conoscere il risultato, quanto sapere che tal problema non era inaccessibile alla geometria di quei tempi. Ed a ciò non si potrà arrivare, se non col trovare una soluzione, la quale dipenda in modo semplice e diretto dai soli principj della geometria più elementare. Trovata questa, ed acquistata così la certitudine, che Eudosso poteva rendersi conto esatto della natura del suo problema, ed ottenerne, se non il calcolo, almeno la costruzione rigorosa, rimarrà la parte storica del nostro còmpito: dimostrare cioè che veramente Eudosso è giunto ad una soluzione conveniente al suo bisogno, e che egli conosceva con precisione la forma della curva descritta dal punto M in conseguenza del moto combinato delle due sfere. Noi ci applicheremo ora con tutta la cura possibile alla dilucidazione dell'una e dell'altra questione, cioè della geometrica e della istorica, e procureremo di non lasciare, su questo argomento importante, alcun dubbio nell'animo dei lettori.

Proposizione I. Problema. — Essendo date le due sfere in una fase qualunque del loro movimento secondo le ipotesi preannunziate (fig. 2), determinare, sopra di una sfera fissa e concentrica alle due prime, la posizione di quel circolo massimo A O B, sul quale arrivano simultaneamente il polo P della seconda sfera e il pianeta M, che ad essa è attaccato (78).

Conducasi pei poli fissi della prima sfera il circolo massimo A P B, il quale passi per la posizio-

(78) Chiamo qui prima e seconda sfera quelle che Eudosso poneva come terza e come quarta. La prima suppongo girevole intorno ai poli A B, la seconda intorno al polo P ed al suo opposto, secondo l'enunciato del problema.

ne, che il polo P occupa nell'istante considerato. E si conduca per A e per B un circolo massimo A O B tale, che l'angolo sferico P A B sia uguale all'angolo sferico M P B. Dico che A O B sarà il circolo massimo dimandato. Infatti, per le supposizioni fondamentali, essendo il moto di M intorno a P uguale e contrario al moto di P intorno ad A, quando l'arco M P avrà girato verso P B in modo da coincidere con P B, l'arco A P si sarà girato di un angolo uguale verso A O, e coinciderà con A O. I due poli ed il pianeta M si troveranno dunque tutti e tre sul circolo massimo A O B, ed M si troverà sul prolungamento dell'arco A P che congiunge i due poli, e giacerà dalla parte di P.

Scolio I. Quando, a partire da A B, il polo P avrà descritto mezza circonferenza del suo parallelo Q R, l'angolo M P B sarà pure di mezza circonferenza; quindi anche in quest'altra posizione i tre punti A P M giaceranno sul circolo massimo A O B, ma ordinati fra loro diversamente. Dopo un giro intiero di P intorno ad A e di M intorno a P si ristabilirà completamente la posizione iniziale: onde il moto di M sarà strettamente periodico, e il periodo sarà equivalente alla durata di una rivoluzione delle due sfere.

Scolio II. Se consideriamo dall'altra parte del circolo A O B una posizione P′ del polo mobile simmetrica rispetto a P (cioè prendiamo l'angolo P′ A O = P A O), si avrà pure l'angolo M′ P′ B = M P B; e la posizione del pianeta in M′ sarà simmetrica colla posizione M rispetto al circolo A O B. Di qui si conclude, che la via percorsa dal pianeta M è simmetrica rispetto a questo circolo, il quale perciò chiameremo *circolo fondamentale*, e il suo piano, *piano fondamentale*. Per brevità inoltre designeremo il piano C D, perpendicolare all'asse fisso A B della prima sfera, col nome di *piano diametrale*, e il piano del circolo A C B D, perpendicolare ai due precedenti (del qual circolo O è il polo anteriore), sarà chiamato *piano ortogonale*. La distanza costante A P dei poli omologhi della sfera fissa e della sfera mobile chiameremo *inclinazione*. E l'angolo uniformemente variabile O A P = M P B, che determina ad ogni istante la posizione del pianeta, chiameremo l'*argomento*.

Proposizione II. Teorema. — Se si consideri il circolo A P B (fig. 3) in una determinata sua posizione durante il movimento, e di questo circolo in quell'istante sia E il polo: dico che, conducendo da E al pianeta l'arco di circolo massimo E M, si avrà E M = E O, e di più sarà E M perpendicolare sopra M P. — Poichè E è polo del circolo A P G B, la distanza di P da E sarà un quadrante, e siccome per supposizione la distanza di P dal pianeta M è pure un quadrante, P sarà polo dell'arco E M, onde avremo P M ortogonale su E M. Prolungato poi l'arco E M fino in F, l'arco M F misurerà l'angolo F P M che abbiamo chiamato l'argomento: onde E M sarà di esso il complemento. Ma è palese altresì che l'arco G O misura l'argomento G O A, e che E O è il complemento di G O; dunque E M = E O, come si voleva dimostrare.

Corollario. Se dunque col polo in E si conduca un circolo minore della sfera che passi per O, questo pure passerà per M, e inversamente. E l'arco di questo circolo compreso fra O ed M starà alla sua circonferenza intiera, come l'inclinazione A P sta a tutto il circolo massimo. Infatti, se noi facciamo girare intorno al polo E il triangolo A O G fino a che coincida col suo eguale P F M, si vedrà che A passerà in P, G in F, O in M, tutti i punti descrivendo archi di uguale ampiezza. E quest'ampiezza sarà misurata da A P, cioè dall'inclinazione.

Proposizione III. Teorema. — Le stesse cose essendo poste (fig. 4), se dal pianeta M si abbassa l'arco M H perpendicolare sul circolo massimo diametrale C O D, dico che questo arco sarà uguale all'arco simile O K abbassato da O perpendicolarmente su E M.

Infatti, se pel punto I, dove s'intersecano i circoli PM, OB, si conduca l'arco EI al polo E del circolo APB, i due triangoli OIE EIM saranno uguali, avendo il lato EI comune, gli angoli in O, M, retti, ed EO = EM (Prop. II.). Essi saranno simmetrici rispetto all'arco EI. Se dunque da M si abbassa perpendicolarmente MH, e da O, OK, questi due archi saranno anch'essi simmetricamente disposti rispetto ad EI, e fra loro uguali.

Corollario. Essendo B polo di OE, l'arco MH passerà per B; ed essendo P polo di EM, l'arco OK passerà per P. Sarà PK = BH, perchè ambo quadranti; quindi PO = BM. La distanza del pia-

neta dal polo fisso B è dunque ad ogni istante del movimento uguale alla distanza del polo mobile P dal punto O, polo fisso del circolo ABCD.

Proposizione IV. Teorema. — Le stesse cose essendo poste, la lunghezza della perpendicolare rettilinea abbassata dal pianeta M sul piano diametrale CD (fig. 4) sarà ad ogni istante uguale alla lunghezza della perpendicolare abbassata dal polo P sul piano ortogonale ABCD.

Il circolo massimo KOP della fig. 4 si prolunghi fino in L. L'arco LO è di un quadrante, e così pure è di un quadrante l'arco PK, per esser P polo di EM (Prop. II). Dunque arco LP = arco OK. Ma nella proposizione precedente si è dimostrato, che arco OK = arco MH. Dunque LP = MH. Essendo uguali questi archi perpendicolari, saranno pure uguali le perpendicolari rettilinee corrispondenti abbassate da P sul piano del circolo ABCD, e da M sul piano del circolo COD (79).

Corollario. Quindi si ricava una facile costruzione della distanza del pianeta dal piano diametrale. Descrivasi (fig. 5) in piano un circolo uguale al circolo minore QR percorso dal polo P, e condotti i due diametri perpendicolari *ab*, *cd*, si faccia l'angolo *aop* uguale all' argomento. La perpendicolare *pr* sarà la cercata distanza del pianeta dal piano diametrale.

Scolio. La precedente costruzione mette subito davanti agli occhi la legge, con cui varia la distanza del pianeta M dal piano diametrale. Ad ogni rivoluzione delle due sfere, il polo P descriverà il suo parallelo una volta, e così pure il suo rappresentativo *p* della fig. 5.ª Quando P si trova nel piano fondamentale, *p* sta in *a* od in *b*, e la distanza del pianeta dal piano diametrale è uguale al raggio del parallelo. Quando P si trova nel piano ortogonale, cioè in Q od in R, *p* si troverà in *c* o in *d*, il pianeta si troverà nel piano diametrale. E la distanza del pianeta da tal piano seguirà le fasi del moto oscillatorio, che il piede *q* della perpendicolare *pq* fa sul diametro *ab* durante il rivolgersi uniforme di *p* sulla circonferenza del circolo *a b c d* (80).

Proposizione V. Teorema. — Se per i punti M ed O si conduca (fig. 3.ª) il circolo minore avente per polo il polo E del circolo APGB, e dal punto M, luogo del pianeta, si abbassi la distanza rettilinea perpendicolare MR sul piano diametrale: questa distanza avrà un rapporto costante col diametro del parallelo O M, qualunque sia la posizione del pianeta M.

Abbiamo veduto, nel corollario della proposizione II, che l'arco MO del circolo minore sta alla circonferenza di questo, come l'inclinazione AQ a tutto il circolo massimo ABCD. La perpendicolare abbassata da M su quel diametro del parallelo, che passa per O, sarà evidentemente la stessa, che la perpendicolare abbassata da M sul piano diametrale. Questa perpendicolare avrà dunque al diametro del parallelo il rapporto costante, che la perpendicolare QS ha al diametro AB, essendo OM, AQ archi simili di circoli diversi.

Corollario. Così pure la saetta della semicorda RM del circolo minore, cioè la distanza rettilinea del punto O al piede R della perpendicolare RM, avrà al diametro di esso circolo minore il rapporto costante, che la saetta AS al diametro AB.

Proposizione VI. Teorema. — Se, muovendosi le due sfere di moti uniformi e contrarj secondo le supposizioni fondamentali, ad ogni posizione che prenda il punto M si abbassi la perpendicolare MR sul piano diametrale (fig. 3.ª), il piede R di questa percorrerà con moto uniforme su di esso piano la circonferenza di un circolo tangente in O alla sfera, ed avente il diametro uguale alla saetta AS; e gli archi descritti da R su questo circolo avranno un' ampiezza doppia degli archi corrispondenti descritti da P sul proprio parallelo.

---

(79) In linguaggio moderno: essendo uguali gli archi LP, HM, saranno pure uguali i loro seni.

(80) In linguaggio moderno, detta i l'inclinazione, x la distanza del pianeta dal piano diametrale, θ l'argomento, si ha, fatto il raggio della sfera $= 1$,

$$x = \sin i \cos \theta.$$

Nella fig. 6.ª, sia C D il piano ortogonale, O C O 'D il piano diametrale, OO′ il piano fondamentale: A sarà rappresentativo dei poli della prima sfera, P del polo della seconda sfera finora designato con questa lettera: VV rappresenterà il circolo massimo indicato con A P B nelle figure precedenti, e l'argomento sarà l' angolo O A P. Essendo M la posizione corrispondente del pianeta, E il polo di VV, O N il parallelo a VV condotto per O, abbiamo veduto, che M si trova sul parallelo O N. Il piede della perpendicolare abbassata dal pianeta M sul piano diametrale O C O′D in questa figura sarà rappresentato dallo stesso M: ed O M sarà la distanza di questo piede dal punto O, polo del piano ortogonale. Ora dal corollario della prop. V risulta, che questa distanza O M sta al diametro O N del parallelo in un rapporto costante. Il luogo dei punti M sarà dunque simile e similmente posto rispetto ad O, che il luogo dei punti N; sarà perciò un circolo tangente in O al circolo O C O′D. Ed è manifesto, che l' arco TM, il quale indica la distanza di M da T sul circolo, ha per misura il doppio dell'angolo N O O′, ossia il doppio dell'argomento P A O. Mentre dunque il polo P della seconda sfera descrive sul suo parallelo una circonferenza a partire dalla linea O A, il punto M descriverà nel medesimo senso due circonferenze sul circolo T O partendo da T. Siccome poi il rapporto costante di O M a O N è (Prop. V. *Coroll.*) quello della saetta AS (fig. 3.ª) al diametro A B della sfera: ne concluderemo che O T è uguale alla saetta ora nominata A S: che è quanto ci proponevamo di dimostrare.

Corollario I. Se pel centro X del circolo O T si conduca una retta perpendicolare al piano diametrale, potremo dire che il pianeta descrive angoli uguali in tempi uguali intorno a questa retta.

Corollario II. Se immaginiamo da tutte le posizioni del pianeta condotte le corrispondenti perpendicolari al piano diametrale, queste formeranno nel loro insieme un cilindro retto, avente per base il circolo O T. E la curva descritta dal pianeta sopra una sfera fissa, concentrica alle due mobili, non è altro che l' intersezione di quella sfera con quel cilindro retto.

Corollario III. Facilmente ora si potrà costruire la distanza del pianeta dal piano fondamentale OO′ ad ogni momento. Basta sul circolo O T prendere, partendo da T, un arco T M di ampiezza doppia dell'argomento. La distanza del punto M dal diametro O T esprimerà in grandezza ed in direzione la distanza domandata (81).

Dunque, anche questa distanza, come l' altra precedentemente considerata nella Prop. IV, segue nelle sue variazioni le leggi di un moto oscillatorio, ma qui il periodo è la metà del periodo che regola le variazioni della distanza dal piano diametrale.

Corollario IV. La retta O M ha un rapporto costante col diametro del parallelo O N. Sopra si è veduto, che la lunghezza della perpendicolare abbassata dal pianeta sul piano diametrale ha pure un rapporto costante con quel diametro (Prop. V). Immaginando dunque un triangolo rettangolo, di cui un cateto sia la perpendicolare suddetta, l'altro sia la retta M O, questi due cateti avranno fra di loro un rapporto costante; onde l' ipotenusa di tale triangolo (la quale congiungerà il pianeta col punto O) avrà coi detti cateti un rapporto pure costante, e l'angolo che tale ipotenusa fa col piano diametrale O C O′D sarà pure costante. Dunque le infinite rette condotte dal punto O a tutte le posizioni del pianeta hanno sempre la stessa inclinazione sul piano diametrale. E se per O si conduca la retta perpendicolare al piano diametrale e tangente in O al circolo fondamentale O O′, questa retta, come ugualmente inclinata a tutte le precedenti, sarà l'asse di un cono retto da quelle formato. E facilmente si vedrà, che l'angolo di tal asse colle generatrici del cono è uguale alla metà dell'inclinazione.

Corollario V. Dunque la linea descritta dal pianeta M, durante una rivoluzione delle due sfere, sopra una terza sfera fissa concentrica alle prime può considerarsi come l' intersezione della sfera

---

(81) Secondo le moderne espressioni, il diametro del circolo OT essendo uguale a $1-\cos i$, ossia a $2\,\mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} i$, sarà il raggio di tal circolo $\mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} i$; dicendo y la distanza del pianeta dal piano fondamentale, contata negativamente sotto questo piano, avremo l'espressione

$$y = -\mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2} i, \sin 2\theta.$$

fissa col cono sopra descritto. Epperò questa linea avrà il pregio di risultare dalla intersezione simultanea e tripla dei 3 corpi rotondi, cioè di un cono, di un cilindro e di una sfera.

Corollario VI. Movendosi il punto M sulla circonferenza del circolo O T con moto uniforme, anche l' angolo M O T varierà con variazione uniforme. Quindi si può dire, che il pianeta si muove di moto angolare uniforme intorno all'asse del cono. Ed il pianeta nel suo corso serberà simultaneamente tre moti uniformi: uno intorno all'asse della seconda sfera, uno intorno all'asse del cilindro (V. qui sopra *Coroll. I.*), ed un terzo intorno all' asse del cono ora designato. Il primo asse è mobile nello spazio; gli altri due sono fissi e paralleli fra di loro.

Proposizione VII. Problema. — Costruire sul piano ortogonale la traccia icnografica del corso del pianeta durante una intiera rivoluzione delle due sfere.

Preso come raggio Q S, semidiametro del parallelo descritto dal polo P (fig. 3.ª), e come altro raggio la metà della saetta A S, si descrivano due circoli concentrici (fig. 7.ª), e si divida il circolo minore in un certo numero di parti uguali, e il circolo maggiore in un numero doppio di parti uguali, avendo cura che le origini delle divisioni (segnate collo zero sulla figura) siano, nei due circoli, opposte rispetto al centro comune: quindi si numerino le divisioni progressivamente, andando nel medesimo senso, e nel circolo minore si continui la segnatura per due giri, onde avere in ambi i circoli due numerazioni uguali. Quindi si conduca il diametro X X che passa per le origini delle due divisioni, e il diametro perpendicolare Y Y; e per ogni punto delle divisioni del circolo maggiore condotta una parallela ad Y Y, per l' omologa divisione del circolo minore si conduca ad incontrar quella una parallela ad X X; gli incontri così ottenuti formeranno una serie di punti a guisa di 8, e questa sarà la projezione icnografica dimandata, in cui X X rappresenterà il piano fondamentale, Y Y il piano diametrale, e in cui la projezione del pianeta apparirà muoversi secondo l' ordine dei numeri romani scritti sulla curva in corrispondenza a quelli scritti sulle due circonferenze. La ragione di questa costruzione sta nelle regole speciali date per trovare ad ogni valor dato dell' argomento la distanza del pianeta dal piano diametrale (Prop. IV Coroll.) e dal piano fondamentale. (Prop. VI Coroll. III) (82).

Scolio I. Si noterà facilmente, che l'asse longitudinale della curva è uguale al diametro del parallelo descritto dal polo P della sfera che porta il pianeta, e che la sua larghezza è uguale alla saetta A S (fig. 3.ª), o al diametro del cilindro, su cui si trova la trajettoria descritta dal pianeta nello spazio. Le quattro digressioni estreme dal piano fondamentale, i due passaggi pel punto doppio centrale, e i passaggi pei due apsidi estremi, costituiscono otto fasi principali del movimento, e dividono la curva in otto archi, i quali dal pianeta sono percorsi in tempi eguali.

Scolio II. Combinando l'aspetto della traccia icnografica sul piano ortogonale con la nozione, che la vera curva descritta nello spazio del pianeta è l'intersezione di una sfera A B (fig. 3.ª) con un cilindro di diametro A S, il cui asse è parallelo all'asse A B e tocca la superficie sferica nel punto O, potremo giudicare facilmente della forma che ha la curva percorsa dal pianeta nello spazio. La figura 8.ª indica in modo sufficientemente chiaro, in qual guisa la curva si adatta simultaneamente alla sfera ed al cilindro. L'intersezione o punto doppio centrale O coincide col polo del piano ortogonale, designato colla stessa lettera nelle figure precedenti; e così pure si riconoscerà in A B il piano fonda-

(82) In linguaggio moderno diremo, che le equazioni della curva sono le due precedentemente trovate, cioè

$$x = \sin i \cos \theta$$

$$y = - \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} i \sin 2\theta,$$

dove x ed y rappresentano le coordinate rettangole riferite agli assi XX e YY: dalle quali si potrebbe, volendo, eliminar θ. La projezione della curva sul piano ortogonale è dunque il risultamento delle combinazioni di due moti vibratorj fra loro perpendicolari, dei quali l'uno compie le sue fasi due volte più velocemente dell'altro, coincidendo le quattro fasi principali del moto più lento colle fasi centrali (o posizioni d'equilibrio) del moto più veloce. La curva risultante è una delle note linee acustiche di Lissajous (Jamin, *Physique*, vol. II, tav. III).

mentale, in C D il piano diametrale. Si deve immaginare che nei due minori dei quattro angoli che formano la curva in O, il cilindro copra la sfera, e nei due maggiori la sfera copra il cilindro, le due superficie toccandosi e intersecandosi simultaneamente in quel punto. Nè più difficile sarebbe mostrare come la stessa curva si adatti pure al cono descritto nella Prop. VI. coroll. IV; in questo caso si vedrebbe, come il vertice del cono essendo in O, ognuna delle due falde opposte del cono dà origine ad uno dei due lobi della curva, e come l'angolo sotto cui la curva taglia sè medesima in O, è uguale all'angolo al vertice del cono, cioè all'inclinazione.

Queste poche e semplicissime proposizioni, in cui veramente più nella sostanza che nella forma ho cercato di serbare il carattere dell'antica geometria, danno il modo di giungere alla costruzione della curva descritta dal pianeta, alla quale per la sua forma daremo il nome di *lemniscata sferica;* ed offrono anche già un breve quadro di alcune sue principali proprietà (83). Credo inutile accrescerne il numero, prima perchè questi fiorellini di geometria oggi non hanno più l'interesse d'una volta, e dai matematici, occupati intorno al tronco ed alle radici dell'albero della scienza, si abbandonano alla coltura dei principianti; ma sovratutto perchè ampiamente già è ottenuto il nostro scopo di provare, che a quella costruzione e a quelle proprietà si può giungere brevemente e facilmente, col soccorso di una geometria molto più elementare di quella che siamo in dritto di attribuire ad Eudosso, e senza far alcun uso di metodi moderni. Verrò ora ad indicare in qual modo è credibile che se ne sia fatto uso per spiegare quei fenomeni dei pianeti, che si collegano coll'anomalia solare.

Ritorniamo per questo alla considerazione delle quattro sfere, che, secondo Aristotele e Simplicio, Eudosso attribuiva a ciascun pianeta; ed invece di lasciar fisso l'asse AB (fig. 3), immaginiamone appoggiati i poli sulla seconda delle sfere d'Eudosso, in modo che questi poli percorrano il circolo dell'eclittica in un tempo uguale alla rivoluzione zodiacale del pianeta. Supponiamo di più, che il circolo fondamentale AOB coincida costantemente col circolo dell'eclittica. Allora il punto O, che è il centro della nostra lemniscata sferica, si troverà sull'eclittica, e l'asse longitudinale della lemniscata (cioè il circolo massimo che ne unisce gli apsidi estremi) coinciderà pure con questo circolo; ed il punto O, del pari che A e B, descriverà con moto uniforme in una rivoluzione zodiacale tutto il circolo dell'eclittica, trascinando seco la lemniscata. Noi potremo ora, senza turbare il movimento del pianeta, surrogare alla terza ed alla quarta sfera la lemniscata, sulla quale il pianeta si muove secondo le regole qui sopra

---

(83) Varj interessanti problemi offre la considerazione di questa curva, delle parti di superficie sferica, cilindrica, e conica in essa rinchiuse, dei volumi compresi fra quelle superficie e limitati dalla curva; problemi che tutti danno soluzioni semplici ed eleganti, e dimostrabili colla geometria elementare. Quando l'inclinazione è un angolo retto, la curva offre il caso del problema di Viviani della vôlta emisferica quadrabile, in cui ogni metà di uno dei lobi rappresenta una delle quattro finestre. Accennerò ancora alla proprietà che hanno gli archi di tutte queste lemniscate sferiche, di poter esser sommati, sottratti, moltiplicati e divisi con regole molto simili a quelle, che servono ad eseguire le medesime operazioni sugli archi ellittici; della quale l'espressione più notabile è questa, che la lunghezza di tutta intiera la lemniscata è uguale a quella di una ellisse, di cui un semiasse è uguale alla corda dell'inclinazione AQ, l'altro semiasse è uguale alla saetta o seno verso AS (fig. 3).

Queste lemniscate appartengono inoltre alla classe delle epicicloidi sferiche, e godono di tutte le loro proprietà. Infatti, sia AB (fig. 9) l'asse della prima sfera e QR il parallelo descritto dal polo P della seconda; sia diviso per metà l'arco QB in Z, e condotto il parallelo ZZ′. Poi da Q come polo si descriva il circolo minore ZU; e supponiamo, che stando fissa la callotta sferica ZBZ′, l'altra callotta uguale ZQU ruoti sulla medesima senza strisciare nel contatto comune Z. Se colla callotta mobile sia connesso invariabilmente un punto M tale, che si applichi costantemente sulla superficie sferica, e sia lontano da Q un quadrante; il punto M descriverà la lemniscata corrispondente all'inclinazione AQ.

sviluppate. Componendo dunque questo moto del pianeta sulla lemniscata col movimento progressivo della lemniscata stessa lungo l'eclittica, avremo il movimento composto del pianeta nella fascia zodiacale. Ora il moto della lemniscata lungo lo zodiaco è uniforme, e la sua velocità è tale, da farle percorrere tutta l'eclittica nel tempo della rivoluzione zodiacale del pianeta, ed è sempre nel medesimo senso, cioè secondo l'ordine dei segni. Al contrario, il corso del pianeta sulla lemniscata si traduce in una oscillazione periodica d'andata e ritorno, di cui la legge è stata definita nella Prop. IV. L'intiero ciclo di quella oscillazione si fa nel tempo assegnato da Eudosso alla rivoluzione della terza e della quarta sfera, che è il tempo della rivoluzione sinodica. Ad ogni periodo sinodico avverrà dunque, che per mezzo periodo il moto del pianeta lungo l'eclittica sarà accelerato, sommandosi il moto della lemniscata con quello del pianeta lungo di essa; e per l'altro mezzo periodo il pianeta apparirà ritardato, contrastando l'uno all'altro i due moti ora accennati. Ed anzi, se in qualche parte della lemniscata il pianeta nell'oscillazione retrograda si moverà più rapidamente nel senso della longitudine di quanto avanzi la lemniscata col suo moto diretto, il moto risultante del pianeta sarà retrogrado durante un certo intervallo, e si avrà una retrogradazione compresa fra due stazioni. Ed è manifesto, che da una parte la massima accelerazione del pianeta in longitudine e dall'altra la massima ritardazione o la massima velocità retrograda avranno luogo quando il pianeta correrà più veloce nel senso longitudinale, ciò che avviene quando esso passa pel centro o punto doppio della lemniscata. L'insieme dei movimenti dovrà dunque esser combinato in modo, che il pianeta si ritrovi al centro della lemniscata e abbia su di essa movimento diretto, quando succede la congiunzione superiore, dove notoriamente la velocità apparente dei moti planetarj in longitudine è massima; ed occupi il medesimo centro e sia retrogrado sulla lemniscata, quando il pianeta è in opposizione o in congiunzione inferiore, ai quali punti risponde la retrogradazione più veloce. Manifestamente poi cotesta combinazione di moto progressivo e di moto oscillatorio in longitudine sarà accompagnata da un corrispondente moto in latitudine, il quale potrà allontanare il pianeta dall'eclittica di tanto, quanto importa la mezza larghezza della lemniscata. Questo movimento farà giungere il pianeta due volte ai limiti boreali e due volte ai limiti australi, e gli farà traversare l'eclittica quattro volte in una rivoluzione sinodica.

Questi sono i risultamenti, ai quali conduce una libera ma logica riflessione sulle poche notizie che restano intorno alle teorie planetarie d'Eudosso. Tali sviluppi però non acquisteranno per noi alcun valore istorico, e non saranno di alcun uso al nostro proposito, se non quando avremo fatto vedere, che Eudosso, o per la via da noi seguita, o per altra egualmente piana e diretta, è giunto veramente ai principali risultamenti da noi accennati; onde, esaurita la parte matematica e teoretica della nostra dimostrazione, aggrediremo la parte istorica; e primieramente verificheremo, se gli effetti da noi descritti non sono in opposizione con quelli che brevemente Simplicio accenna verso la fine della sua narrazione sulle sfere d'Eudosso, § 6. « La terza sfera, egli dice, la quale ha i suoi poli nella seconda collocati lungo l'eclittica, rivolgendosi da mezzodì a settentrione e da settentrione a mezzodì, conduce seco la quarta, che porta l'astro, e cagiona il movimento di questo in latitudine. Nè però è sola a produrre questo effetto. Perchè di quanto, seguendo la terza sfera, l'astro si è avanzato verso i poli dell'eclittica, e si è avvicinato ai poli del mondo, di altrettanto retrocedendo la quarta sfera, che compie il suo giro in senso contrario alla terza in egual tempo, lo riconduce indietro, facendogli anzi traversare l'eclittica, ed obbligandolo a descrivere da ambi i lati di questo circolo la linea curva chiamata da Eudosso *ippopeda.* Questa occupa appunto tanta larghezza, quant'è il moto dell'astro in latitudine ». Queste dilucida-

zioni di Simplicio comprendono in modo breve e abbastanza preciso gli effetti del movimento della terza e della quarta sfera, e corrispondono egregiamente alla descrizione che qui sopra ho dato dei medesimi effetti. Noi vediamo di più, che alla curva percorsa dal pianeta in conseguenza del suo moversi simultaneo sulla terza e sulla quarta sfera, Eudosso aveva dato il nome d'*ippopeda*. Se noi proveremo, che questa curva aveva la forma e le proprietà della nostra lemniscata sferica, la dimostrazione potrà dirsi completa.

Non è questa la sola volta, che il nome d'*ippopeda* si trova applicato ad una linea curva nella geometria dei Greci. Nel suo prezioso Commentario sul primo libro degli Elementi d'Euclide, Proclo parla tre volte di una curva chiamata *ippopeda*. In un luogo classifica l'ippopeda fra le linee miste (cioè diverse dalle semplici, che erano la retta ed il circolo), e dice che essa appartiene alla classe delle linee *spiriche* (84). Altrove ripete che l'ippopeda è una linea spirica, ed aggiunge che questa curva, sebbene unica, forma un angolo, intersecando sè medesima (85). L'ippopeda dunque, secondo Proclo, era una curva dotata di un punto doppio. Maggiori particolarità si trovano in un terzo luogo (86), dove, dopo avere narrato come Perseo geometra scoprisse tre linee curve derivanti da sezioni piane del solido detto *spira*, Proclo espone « l'una di queste sezioni spiriche esser ripiegata sopra sè medesima (ἐμπεπλεγμένη) e simile alla ἵππου πέδη; l'altra allargata nel mezzo e restringentesi verso le estremità; la terza essere allungata, ristretta nel mezzo e più larga alle due estremità. »

È noto, che presso i geometri greci andava designato col nome di σπεῖρα quel solido annulare di rivoluzione, che è generato da un circolo ruotante intorno ad una retta qualunque contenuta nel suo piano, e non passante pel suo centro (87). Questo solido, che oggi con vocabolo desunto dalla tecnica architettonica si suol designare col nome di *toro*, può ammettere un'infinità di sezioni differenti; ma considerando solo le sezioni che danno una certa specie di simmetria, e che prima d'ogni altra Perseo ha dovuto studiare, il lettore si avvedrà ben presto dalla descrizione, che dà Proclo delle tre spiriche, che esse rappresentano le tre principali forme risultanti dalla sezione del solido fatta con un piano parallelo all'asse principale. Le tre curve indicate nella figura 10ª corrispondono a capello ai caratteri indicati da Proclo. La prima è ripiegata sopra sè medesima, ed ha un punto doppio, proveniente da ciò, che il piano segante tocca la superficie in un punto del circolo di gola; è la curva designata col nome d'*ippopeda*, e che Proclo dice simile alla ἵππου πέδη. La seconda ha luogo quando il piano segante dista dall'asse più che il centro del circolo generatore; è una specie di ovale, gonfia nel mezzo, e stretta agli estremi. La terza ha luogo quando il piano segante dista dall'asse meno che il centro del circolo generatore, e questa ha una figura allungata, stretta nel mezzo, e larga agli estremi (88). L'ippopeda di Proclo (o piuttosto di Perseo) ha

---

(84) PROCLI DIADOCHI *in primum Euclidis elementorum librum Commentarii ex recognitione God.* FRIEDLEIN. Lipsiae in aedibus G. B. Teubneri, 1873, p. 127.

(85) *Ibid.* p. 128.

(86) *Ibid.* p. 112.

(87) V. PROCLO, nell'opera citata, p. 119: v. pure ERONE nelle *Definizioni geometriche* pubblicate da Friedlein nel *Bullettino* del Pr. Boncompagni, t. IV, p. 108. Secondo Erone, alla spira si usava dare anche il nome di κρίκος (anello). Vitruvio nell'*Arch.* III, 3 usa il vocabolo *spire* nel senso di modanature curve annulari nelle basi delle colonne; modanature che sono parti o combinazioni di parti di superficie spiriche.

(88) L'interpretazione qui adottata del passo piuttosto indeterminato di Proclo sulle linee spiriche e sulla forma di queste curve, concorda nel punto essenziale con quella, che come più probabile venne designata da KNOCHE e da MAERKER nel loro pregevolissimo programma scolastico intitolato: *Ex Procli successoris in Euclidis Elementa commentariis*

dunque anch'essa la figura di lemniscata, come la curva sferica descritta dai pianeti in conseguenza del movimento della terza e della quarta sfera: la quale curva pertanto noi crediamo esser l'ippopeda d'Eudosso, essendo ben naturale che a curve di forme consimili (sebbene geometricamente assai diverse), Eudosso e Perseo abbiano assegnato il nome di un medesimo oggetto di uso familiare ai Greci, l'ἵππου πέδη, la cui forma quelle curve richiamavano alla memoria.

---

definitionis quartae expositionem, quae de recta est linea et sectionibus spiricis commentati sunt T. H. Knochius et F. J. Maerkerus, Herefordiae 1856. Differiscono però i citati autori in questo, che secondo loro la curva, la quale Proclo dice esser più larga nel mezzo e più stretta agli estremi, sarebbe una delle due ovali conjugate, in cui si risolve la sezione spirica, quando il piano segante parallelo all'asse penetra nel vuoto interno dell' anello, dividendo questo in due tronchi separati. Delle tre sezioni, questa sarebbe la più vicina all'asse, mentre, secondo il mio modo di vedere, sarebbe la più lontana. Ma ciò non importa nulla alla questione che ci occupa, relativa all' ippopeda, sulla quale ho il piacere di trovarmi d'accordo coi due dotti sopra nominati.

Knoche e Maerker però, ammettono come possibile, se non come probabile, l'opinione che si possa soddisfare alle espressioni di Proclo, supponendo le tre sezioni non parallele all' asse principale della spira, ma inclinate e passanti pel centro della spira nel modo che indica la fig. 11. L' ippopeda sarebbe allora la sezione AB bitangente alla superficie, e avente due punti doppj: le altre due curve consterebbero ciascuna di due ovali, cioè la sezione CD darebbe due ovali concentriche, sebbene non simili, e la sezione EF darebbe due ovali disgiunte e simmetriche intorno ad un solo asse. Non posso accostarmi a questa opinione. Primo, è da notare che i Greci avrebbero forse veduto nelle sezioni CD due linee diverse, invece di una sola; ove le sezioni spiriche si trovano sempre designate come tre. Ma l'obbiezione più grave sta in questo, che la sezione AB non può esser stata chiamata ippopeda, per la semplice ragione, che questa sezione non è una curva nuova, ma risulta semplicemente dall' insieme di due circonferenze di circolo, che s' intersecano nei due punti m n dove il piano segante AB tocca e taglia simultaneamente la superficie nella parte concavo-convessa. Il qual fatto sembra che sia sfuggito alle indagini di quei due dotti espositori di Proclo.

Una terza interpretazione diversa dalle precedenti sembra richiesta dal passo seguente di Proclo (*Comm. in Euc.* ed. Friedlein p. 119): « La superficie spirica è generata dalla rivoluzione di un circolo, che rimane costantemente perpendicolare (ad un piano) e si aggira intorno ad un medesimo punto diverso del proprio centro. Onde nascono tre specie di spira, secondo che tal punto è sulla circonferenza, o dentro della circonferenza, o fuori della circonferenza (del circolo generatore). Nel primo caso la spira dicesi continua, nel secondo implicata, nel terzo disgiunta. *E vi sono tre sezioni spiriche corrispondenti a queste tre differenze* ». Secondo questa descrizione adunque le tre spiriche di Perseo non nascerebbero dalla stessa spira diversamente tagliata, ma bensì dalle tre diverse specie di spira tagliate secondo una medesima norma, come da tre coni di diversa specie tagliati secondo una stessa regola derivavano gli antichi le tre coniche. Però notano qui giustamente i prelodati Knoche e Maerker, questo passo trovarsi in manifesta contraddizione colla descrizione data da Proclo medesimo in un altro luogo dei caratteri geometrici delle tre spiriche, e da me riferita qui sopra. Infatti, in qualunque modo si voglia cercare di tagliare le tre spire secondo una costante regola, non si otterranno mai tre curve, le quali quadrino esattamente con quella descrizione. Sembra dunque che il parallelo delle tre specie di spira colle tre spiriche, sia derivato da una imperfetta idea della generazione delle medesime. Ciò che aumenta il dubbio è il fatto, che nell'edizione principe di Proclo curata da Simone Grineo nel 1533, quel luogo, che qui si è stampato in caratteri corsivi, manca, e non vi si allude in alcun modo alle linee spiriche, sebbene quel luogo si trovi, col tenore qui riferito, nella versione di Barozzi e nella recente edizione di Friedlein. È da notare di più, che quelle parole: *E vi sono tre sezioni spiriche ecc.*, sono perfettamente inutili in quella parte del discorso, che è tutta sulle superficie e non sulle linee. Ma senza dare troppo peso a queste circostanze, diremo che l' autore di quelle parole (chiunque si fosse) era forse erroneamente persuaso, che dalle tre forme di spira dovessero derivar le tre spiriche in un modo analogo a quello, con cui dalle tre varietà di cono ottusangolo, rettangolo ed acutangolo derivavano, con una sezione perpendicolare ad uno dei lati del cono, l' iperbole, la parabola e l' ellisse.

Per la nostra quistione tuttociò è abbastanza indifferente, risultando con evidenza dalle notizie di Proclo sull' ippopeda, che questa linea era una curva unica, ripiegata sopra sè medesima in modo da tagliar sè stessa ad angolo, formando un punto doppio. La possibilità di due punti doppj è esclusa, perchè la sezione si risolve allora nell' insieme di due circoli. Dunque il piano segante la spira secondo l' ip-

Per completare la nostra dimostrazione occorre dunque ancora ricercare qual è l'oggetto a cui i Greci usavano dare il nome di ἵππου πέδη, e indagare se la sua forma giustifica la traslazione del nome, che Eudosso e Perseo ne fecero alle curve da loro inventate. Ora a tali questioni risponde completamente un passo del trattato di Senofonte sull'equitazione, dove parlando del modo di far manovrare i cavalli e di esercitarli in modo uguale alle conversioni verso destra e verso sinistra, dice: « Noi lodiamo quella manovra, che si fa secondo la linea chiamata πέδη: imperocchè esercita i cavalli a voltarsi da ambidue i lati delle mascelle: ed è bene cambiare il corso del cavallo (da destra a sinistra, e reciprocamente), affinchè la manovra renda simmetrica l'una parte delle mascelle coll'altra. E lodiamo la πέδη allungata piuttosto che quella arrotondata; perchè il cavallo, sazio di correr dritto, si presterà più volentieri alla conversione, e così insieme si eserciterà al corso rettilineo e a voltarsi ». E nello stesso libro, in altro luogo: « Si riconoscono i cavalli non eguali dai due lati delle mascelle, col farli camminare lungo la linea chiamata πέδη » (89). Considerando queste indicazioni appare, che l'ἵππου πέδη presso i Greci era una specie particolare di linea o di corso, che aveva la proprietà di obbligare i cavalli ad alternate conversioni dal lato destro e dal lato sinistro; proprietà la quale suppone, che il cavallo, procedendo lungo tal linea, ora ne avesse la convessità verso destra, ora verso sinistra. La più semplice forma di curva chiusa, a cui questa proprietà compete, è evidentemente quella di una 8 più o meno allungata; forma ancora oggidì usata nelle manovre dei cavalli, e che è appunto quella delle curve di Eudosso e di Perseo. Infatti, da uno sguardo dato alla figura 13 si comprende subito, che se l'animale, descrivendo uno dei due lobi della curva, ha la destra rivolta verso la parte esterna della medesima, nel descrivere l'altro lobo avrà alla destra la parte interna; onde se, giunto ad una estremità della curva, fa la sua conversione verso destra, all'altra estremità sarà obbligato a far conversione verso sinistra.

Io debbo dimandar perdono al lettore di trascinarlo in sviluppi ed in digressioni di questa specie; pure soltanto dopo bene ponderate tutte le analogie e le relazioni esposte in questo articolo, è possibile riguardare come sufficientemente dilucidata e dimostrata la natura del meccanismo delle stazioni e delle retrogradazioni e del moto in latitudine nel sistema delle sfere omocentriche.

---

popeda dovea esser tangente alla spira in un punto della sua parte concavo-convessa. Le forme che si possono ottenere in questo modo si riducono a tre tipi: il primo dei quali è simmetrico rispetto a due assi fra loro perpendicolari, ed è simile alla lemniscata; gli altri due sono simmetrici rispetto ad un asse solo e danno curve simili a quelle della fig. 12. Il secondo tipo ha due foglie disuguali, di cui una è circondata dall'altra; il terzo dà due foglie uguali separate. Il secondo tipo non può manifestamente adattarsi alle funzioni d'ippopeda descritte da Senofonte (vedi la nota seguente); perchè correndo lungh'essa in un senso determinato, la concavità della curva rimane sempre a destra o sempre a sinistra. Il terzo tipo potrebbe, a rigore, soddisfare agli usi dell'ippodromo; ma la sua disposizione non è la più adatta, risultando da una trasformazione poco opportuna del primo tipo, cioè della lemniscata. Questa rimane dunque sempre la figura più probabile, anche astraendo dalla circostanza, che Perseo ha dovuto considerare i casi più semplici delle spiriche, a preferenza dei più complessi; e dall'altra circostanza, che curve simili a quelle del secondo e del terzo tipo non potrebbero risultare in alcun modo dalle combinazioni geometriche di Eudosso.

(89) XENOPH, *De re equestri*, cap. 7.... Ἱππασίαν δ'ἐπαινοῦμεν τὴν πέδην καλουμένην· ἐπ' ἀμφοτέρας γὰρ τὰς γνάθους στρέφεσθαι ἐθίζει. Καὶ το μεταβάλλεσθαι δὲ τὴν ἱππασίαν ἀγαθὸν, ινα ἀμφότεραι αἱ γνάθοι κατ' ἑκάτερον τῆς ἱππασίας ἰσάζωνται. Ἐπαινοῦμεν δέ καὶ τὴν ἑτερομήκην πέδην μᾶλλον τῆς κυκλοτεροῦς, ecc. Lo stesso cap. 3... Τούς γε μὴν ἑτερογνάθους μενύει μὲν καὶ ἡ πέδη καλουμένη ἱππασία. Parimente Esichio, grammatico Alessandrino, tra i significati che nel suo gran lessico dà alla voce πέδη, ha anche quello di « figura di manovra equestre » (εἶδος ἱππασίας). HESYCHII *Lexicon*, ed. Alberti Lugd. Bat. 1746-66. Tom. II, p. 898.

Non il nome dell'*ippopeda*, ma la cosa stessa sotto nome diverso sembra accennata con probabilità in altri antichi scritti. Nel *papiro d'Eudosso*, del quale già si è avuto occasione di parlare, e che sembra contenere un sommario delle dottrine di quest'astronomo, è detto, che Mercurio impiega 116 giorni a descrivere la sua *elica* (90). Il periodo di 116 giorni evidentemente è quello della rivoluzione sinodica di Mercurio, onde si conclude, che l'autore del papiro intendeva designare per *elica* quella curva, che percorsa in intiero dal pianeta, ne produce le fasi sinodiche. Questa curva non può esser l'epiciclo, perchè in tal caso lo scrittore del papiro non avrebbe usato per designarlo il nome di *elica*. Considerando dunque, che il papiro contiene dottrine direttamente derivate da Eudosso, noi reputiamo assai probabile, che l'elica qui serva a designare appunto l'ippopeda. Veramente il nome di elica era più frequentemente usato dai Greci per indicare una linea spirale come quella d'Archimede, od anche la curva che forma il verme di una vite, ed in quest'ultimo senso l'ha usato Platone. Tuttavia la parola *elica* o *linea elicoide* era pure impiegata a designare curve complesse, e differenti dalle ordinarie curve considerate nella geometria. Perseo stesso, se dobbiamo credere a Proclo, designò col nome di *elicoidi* le linee spiriche da lui inventate (91), fra le quali pure era una specie d'ippopeda, come si à veduto.

In questo modo di pensare mi conferma la considerazione degli ultimi capitoli dell'*Astronomia* di Teone Smirneo, nei quali questo autore intraprende di dare una breve esposizione delle dottrine astronomiche professate dal filosofo platonico Dercillide (92). Dercillide « non « crede, che le *linee elicoidi* e le *simili alla* (linea) *ippica* possano riguardarsi come causa « del moto erratico dei pianeti; essere queste linee prodotte per accidente; la prima e pre« cedente causa del *moto erratico* e dell'*elica* essere il moto che si fa nell'obliquità del « circolo zodiacale. Il moto de' pianeti nell'elica è infatti avventizio, e prodotto dalla combi« nazione di due movimenti di quegli astri ». Descrive quindi Dercillide, come un'elica nasce dalla combinazione del moto zodiacale e del moto diurno dei pianeti, e ne indica molto chiaramente il risultamento finale, che è identico all'elica descritta da Platone nel *Timeo*.

Questo passo ci apprende da prima, che esistevano certi filosofi o astronomi confutati da Dercillide, i quali spiegavano i movimenti erratici dei pianeti per mezzo di *linee elicoidi* e *simili alla linea ippica*. Per noi costoro non possono esser altri che Eudosso, e quelli che gli succedettero nel professare e nel perfezionare il sistema delle sfere omocentriche; *le linee elicoidi e simili all'ippica* non sono altro che le diverse ippopede dei diversi pianeti.

Dal medesimo pure intendiamo, che non dirittamente Dercillide assimilava all'elica di Platone le linee elicoidi e l'ippica. Non è facile vedere, come l'elica di Platone abbia somiglianza con una linea qualunque descritta da cavalli. Veramente Dercillide poco più sotto avverte, esser due le specie di elica, cioè quella simile alle spirille della vite ed alle circonvoluzioni delle scitale laconiche (l'elica cilindrica dei moderni), ed un'altra elica piana, che egli anche insegna a descrivere, ed è semplicemente una sinusoide piana indefinita, corrente fra due linee parallele. Questa sinusoide, secondo H. Martin, è l'*ippica* di Dercillide; anzi l'*ippopeda* di Eudosso non sarebbe, secondo lui, diversa da tal sinusoide. In questo io mi

(90) Traggo questa citazione del papiro da Letronne, *Journal des Savants*, 1841, p. 544: Στίλβων ὁ Ἑρμοῦ τὴν ἕλικα διεξέρχεται ἐν μησὶ τρισὶν καὶ [ἡμέραις] εἴκοσι ἕξ.

(91) V. il celebre epigramma relativo all'invenzione delle linee spiriche presso Proclo nel commentario al 1° d'Euclide, p. 112 dell'edizione di Friedlein.

(92) Theonis, *Astron.* ed. Martin, p. 328 e seg. Il passo più importante è questo: Οὐκ ἀξιοῖ (Δερκυλλίδες) δὲ του πλανωμένου αἰτίας οἴεσθαι τὰς ἑλικοειδεῖς γραμμάς... τάς τε ἱππικῇ παραπλησίας...

permetto di esprimere un parere contrario a quello dell'egregio espositore di Teone; perchè: 1.° Dercillide in nessun luogo accenna alla identità della ippica colla sua pretesa elica piana. 2.° Questa è derivata per sviluppo cilindrico, non già dalla elica Platonica, ma dal solo e semplice circolo obliquo dello zodiaco, onde la sua funzione è perfettamente identica a quella di questo circolo, ed essa non spiega gli erramenti dei pianeti più che questo circolo non faccia. 3.° Non si comprende come l'ippica planetaria, che è una curva essenzialmente sferica e rientrante in sè medesima, possa identificarsi alla elica piana di Dercillide, la quale è indefinita. 4.° Eudosso non ha potuto impiegare per le sue ipotesi una linea, che non presenta alcun mezzo di spiegare le retrogradazioni dei pianeti; infatti il corso nella sinusoide è sempre diretto, e non mai retrogrado. 5.° Per quanto io sappia, la sinusoide non ha, per la sua forma, alcun titolo speciale ad esser denominata *curva ippica.* 6.° Finalmente, essa non può identificarsi colla ippopeda d'Eudosso per la semplice ragione, che i movimenti delle sfere planetarie, così chiaramente descritti da Aristotele e da Simplicio, non possono produrla in alcuna maniera. — Io credo piuttosto, che Dercillide, con quella sua digressione affatto fuor di luogo sopra una curva inutilissima per l'astronomia, abbia voluto far pompa di sapere geometrico, anzi che esporre la natura della linea ippica, la quale egli non intendeva bene. Epperciò la citazione che Dercillide fa, dell'opinione di coloro, i quali volevan derivare gli erramenti dei pianeti dalle linee *elicoidi* e *simili* all'*ippica,* rimane per noi sommamente preziosa e confermativa delle cose in questo articolo dichiarate, sebbene il filosofo Platonico co' suoi commenti fuor di luogo ne abbia reso il senso alquanto oscuro.

VI. Teorie speciali dei Pianeti secondo Eudosso.

Nelle antiche teorie planetarie, gli elementi più importanti erano la durata della *rivoluzione zodiacale* e quella della *rivoluzione sinodica.* Simplicio ci ha conservato questa parte delle teorie planetarie di Eudosso, ma, a quanto sembra, soltanto in numeri rotondi: perchè delle rivoluzioni zodiacali le durate sono assegnate in anni intieri, e delle rivoluzioni sinodiche in mesi, e in decine di giorni. Supponendo che i mesi qui designati siano di 30 giorni ciascuno, abbiamo la seguente tavola, dove, per comodo di paragone, a lato dei numeri antichi furono apposti i risultamenti dei moderni.

Pianeta	Rivoluzioni sinodiche			Rivoluzioni zodiacali			
	d' Eudosso.	moderne.			d' Eudosso.	moderne.	
Saturno giorni	390	giorni 378		anni	30	anni 29	giorni 166
Giove	390	399		. . . .	12	11	315
Marte	260	780		. . . .	2	1	322
Mercurio. . . .	110	116		. . . .	1	1	0
Venere	570	584		. . . .	1	1	0

Sebbene la qualità dei numeri mostri, che in essi non si intendeva dar altra cosa che un' idea grossolana di quei periodi, pure vediamo già in questi primi saggi delle teorie planetarie dei Greci una discreta approssimazione, quale era allora difficile ottenere dalle osservazioni di un sol uomo (93). Nel papiro di Eudosso si trova indicata la rivoluzione sinodica

(93) Conviene eccettuare la rivoluzione sinodica di Marte, di cui parleremo più sotto. Un singolare effetto della poca attenzione e dell'apatia, con cui generalmente furono considerate le ipotesi astronomiche di Eudosso, si può vedere presso lo stesso accuratissimo Schaubach, il quale nella sua *Storia dell'Astronomia Greca prima d'Eratostene,* discutendo i numeri qui sopra riferiti, sembra ignorare affatto che la prima

di Mercurio in 116 giorni, che è appunto il numero moderno (94): se questo dato, come sembra probabile, proviene da Eudosso, dobbiamo ammettere in lui la nozione di numeri più precisi, quali forse egli ha potuto apprendere in Egitto, od anche da comunicazioni con Babilonia. Dobbiamo però osservare, che nel medesimo papiro è indicata la rivoluzione zodiacale di Marte in due anni (95) e quella di Saturno in 30 anni (96), esattamente come qui sopra. Così stando le cose, è inutile discutere su questi numeri, essendo perfino impossibile di sapere da essi se Eudosso conosceva la relazione fondamentale che è noto esistere fra l'anno solare, la rivoluzione zodiacale di un pianeta, e la rivoluzione sinodica del medesimo. Senza dunque occuparci altro del grado di approssimazione di quei numeri, passeremo ad esaminare quali sono le conseguenze che derivano dall'applicarli al meccanismo fondamentale sviluppato nell'articolo precedente, e quali ne sono i risultati per le teorie dei singoli pianeti, cominciando da

1. Saturno. Da quanto si è detto sui fondamenti delle teorie planetarie di Eudosso si vedrà, che per completarne gli elementi basterebbe assegnare per ciascun pianeta il valore dell'inclinazione dell' asse della quarta sfera sull' asse della terza; infatti, con questo solo dato si determinano completamente tutte le misure dell'ippopeda, e con questa il moto sinodico del pianeta e l' ineguaglianza solare e il moto in latitudine è totalmente definito. Sventuratamente Simplicio non dà il valore dell'inclinazione nè per Saturno, nè per gli altri pianeti, ma semplicemente indica che questa inclinazione è diversa nei diversi pianeti (V. App. II § 5). Su questo punto siamo dunque ridotti a semplici congetture. Siccome però è certo, che Eudosso nello stabilire il suo meccanismo ha avuto principalmente in vista, almeno per Saturno, per Giove e per Marte, il problema delle retrogradazioni, così non crediamo di andar troppo lontano dal vero nel supporre, che egli abbia regolato quelle inclinazioni in modo da ottenere per ciascuno dei tre pianeti accennati, un' ippopeda capace di produrre retrogradazioni di ampiezza uguale agli archi di retrogradazione osservati. Onde, senza pretendere di esporre precisamente quello che ha fatto Eudosso, discuteremo quello che deriva dall' accomodare le sue ipotesi all'osservazione dell'arco di retrogradazione, e vedremo come da questo studio si ricavi la spiegazione di più circostanze singolari, che senza di questo apparirebbero oscure ed inesplicabili. Esaminando dunque la teoria di Saturno da questo punto di vista, e sapendo noi che il suo arco di retrogradazione importa circa sei gradi, con alcuni tentativi e calcoli non sarà difficile trovare, che un tal risultamento si ottiene combinando il moto zodiacale di 30 anni col moto sinodico di 13 mesi sulla terza e sulla quarta sfera,

---

delle due serie indica le rivoluzioni sinodiche dei pianeti, e si perde in discussioni inutili per comprendere ciò, che la comparazione di quei numeri coi numeri moderni indica a primo tratto (V. l'opera citata p. 436-439). Peggio è stato trattato Eudosso da Cornewall Lewis, il quale paragona le rivoluzioni *geocentriche* assegnate da Eudosso per Mercurio e Venere (le quali sono esattamente di un anno, come Eudosso bene ha veduto) colle rivoluzioni *eliocentriche* nel sistema copernicano, che naturalmente sono molto diverse, e che non potevano esser determinate in alcun sistema geocentrico d'astronomia. L' errore rispetto a questi due pianeti, dice egli, è grave ed inesplicabile; ma questo errore è di Cornewall Lewis e non di Eudosso.

(94) Letronne, *Journal des Savants*, 1841, p. 544.

(95) Letronne, *ibidem*. Erroneamente però Letronne pretende che questa durata si riferisca alla rivoluzione sinodica; il testo dice chiaramente *Πυροειδὴς τον ζωδίων κύκλον διεξέρχεται ἐν ἔτεσι β*. Si tratta dunque della rivoluzione zodiacale.

(96) *Φαίνων δ'ὁ τοῦ ἡλίου ἀστὴρ, τὸν ζωδίων κύκλον διεξέρχεται ἐν ἔτεσιν λ*. Letronne, *Journ. des Sav.*, 1839, p. 582. Questa denominazione di *astro del Sole* trovasi applicata a Saturno anche presso Simplicio. (V. App. II, § 4); ed è probabile che tanto l'autore del papiro, quanto Simplicio l'abbiano derivata dalla stessa fonte, che era originariamente il libro *περὶ τάχων* d'Eudosso. Diodoro Siculo, II, 30, attribuisce questa denominazione ai Caldei, i quali forse potrebbero avere qualche parte nei numeri d'Eudosso.

adottando per l' asse di quest' ultima un'inclinazione di 6° rispetto all'asse della terza. Allora la lunghezza totale dell' ippopeda sarà di 12°, e la sua mezza larghezza, cioè la massima digressione del pianeta in latitudine dall' eclittica sarà appena di 9′. La combinazione del moto zodiacale col moto sinodico sull'ippopeda farà descrivere al pianeta, ad ogni rivoluzione sinodica, una curva nodata simile a quella descritta nella figura 14, dove le dimensioni trasversali della curva sono state tracciate in scala dieci volte maggiore di quella adottata per le dimensioni longitudinali, nello scopo di rendere più visibile la natura de' suoi flessi. In questa figura, O è il punto occupato dal pianeta nell' istante dell'opposizione, A significa il limite orientale della retrogradazione e il luogo della prima stazione, B il limite occidentale della retrogradazione e il luogo della seconda stazione, A B misura l'arco di retrogradazione, C è il luogo della congiunzione superiore. Partendo da quest'ultima fase, in un' ottava parte della rivoluzione periodica, il pianeta da C giunge alla prima massima digressione in latitudine D; in un secondo ottavo percorre l'arco DE e ritorna all' eclittica; e così in eguali intervalli di tempo, tutti di un ottavo della rivoluzione sinodica, compie gli spazj EF, FO, OG, HI, IC′ ritornando in C′ alla congiunzione superiore col Sole, per ricominciare un simile corso in un' altra parte dello zodiaco. Manifestamente le digressioni trasversali di 9′ da ambe le parti dell'eclittica si possono considerare come trascurabili affatto per le osservazioni di quei tempi: onde l'effetto realmente sensibile di questo movimento così complesso si riduceva al moto di longitudine, il quale insomma non è altro che una retrogradazione compresa fra due stazioni distanti fra loro circa sei gradi, che è appunto quanto potevano aver osservato gli astronomi di quel tempo. L' anomalia solare di Saturno poteva dunque rappresentarsi dall' ipotesi d' Eudosso con una esattezza eguale ed anzi superiore a quella delle osservazioni.

2. Giove. Pel moto di Giove valgono precisamente le medesime riflessioni. Io trovo, che supponendo l'inclinazione di 13°, si ottiene una ippopeda lunga 26° e larga due volte 44′. Se, mentre l'ippopeda descrive col suo centro la rivoluzione zodiacale in 12 anni, si fa descrivere al pianeta la sua rivoluzione sinodica sull'ippopeda in 13 mesi (97), le digressioni massime del pianeta dalle due parti dell'eclittica non riusciranno che di 0° 44′ e saranno ancora insensibili alle osservazioni, mentre l'arco di retrogradazione sarà di circa 8.° La linea descritta dal pianeta dalle due parti dell'eclittica durante una rivoluzione sinodica sarà rappresentata dalla fig. 15, nella quale le dimensioni trasversali sono state esagerate nel rapporto di 3:10, perchè si potessero delineare chiaramente le circonvoluzioni della curva. Le fasi del movimento sono analoghe a quelle già descritte per Saturno. Durante una rivoluzione sinodica, il pianeta traversa l'eclittica 4 volte ad intervalli di tempo uguali, tocca due volte il limite australe di latitudine e due volte il limite boreale, e queste otto fasi del movimento dividono il periodo sinodico in otto parti uguali. Le digressioni in latitudine però rimanendo anche per Giove insensibili all'osservazione, possiamo dire che per Giove, come per Saturno, Eudosso raggiunse egregiamente la soluzione del problema proposto da Platone, di rappresentare il loro corso con movimenti circolari ed uniformi ed omocentrici

(97) Si può domandare qui, come per tutti gli altri pianeti, *in qual senso* l'ippopeda deve esser percorsa dal pianeta. L' esame attento farà riconoscere, che ciò è affatto indifferente, e che qualunque verso si adotti, il moto di longitudine sarà sempre lo stesso, e sempre ugualmente prossimo al vero; mentre il moto in latitudine cambierà l'ordine delle sue fasi, quella parte della curva descritta dal pianeta, che è sopra l' eclittica, passando al disotto, e inversamente. In una parola, la curva del pianeta subirà una inversione simmetrica rispetto all' eclittica considerata come suo asse.

entro il limite della precisione delle osservazioni di quel tempo. Infatti è certo, che l'ampiezza, la durata, e la frequenza delle stazioni e delle retrogradazioni sono press'a poco quali risultano dalle supposizioni descritte.

3. MARTE. Non affatto la stessa cosa può dirsi per Marte, il cui corso apparente nel cielo offriva complicazioni maggiori, e da Plinio era designato col carattere di *maxime inobservabilis* (98). Non è facile comprendere, come Eudosso abbia potuto così gravemente errare sulla durata della sua rivoluzione sinodica, assegnandole 8 mesi e 20 giorni, cioè 260 giorni, mentre sono veramente 780, appunto il triplo di 260. Ideler pensa che qui sia corso qualche errore, e che si debba leggere venticinque mesi e 20 giorni (99); Letronne poi, confondendo la rivoluzione sinodica colla zodiacale, vorrebbe surrogare la durata di due anni o 24 mesi, a torto appoggiandosi sull'autorità del papiro, siccome già si è indicato (100). Certamente non sembra facile ad ammettere, che Eudosso, il quale conosceva per Marte una rivoluzione zodiacale poco distante dal vero, desse alla rivoluzione sinodica una durata, che si trova con quella in evidente contraddizione, ed ignorasse, che data la rivoluzione zodiacale del pianeta e quella del Sole, è data pure la rivoluzione sinodica (101). In tale dubbio io seguirò l'usato metodo, di non decidere quello che più non è possibile sapere; invece esaminerò a qual risultato conduca l'applicazione della teorica planetaria d'Eudosso alle due ipotesi che si possono fare sulla rivoluzione sinodica da lui adottata per Marte, l'ipotesi cioè di 260 giorni, e l'altra di 780 patrocinata da Ideler. Adottando da prima quest'ultima, si vedrà tosto, che è impossibile ottenere per il corso di Marte una soluzione soddisfacente, e simile a quella già descritta per Saturno e per Giove. Infatti, in tal caso non si giunge ad assegnare per l'ippopeda di Marte alcuna ragionevole dimensione. Se, per esempio, si suppone l'ampiezza della lemniscata anche eguale al massimo limite compatibile colla descrizione di Simplicio, cioè eguale a 180° (il che equivale a porre l'inclinazione uguale a 90°), si ottiene un'ippopeda larga 60°, e quindi si è obbligati ad ammettere digressioni di 30° in latitudine. Malgrado queste concessioni estreme, la velocità retrograda del pianeta nell'ippopeda non giunge ad uguagliare la velocità zodiacale diretta dell'ippopeda stessa, e Marte nell'opposizione non può diventar retrogrado, ma soltanto appare assai rallentato nel suo movimento. Onde produrre una retrogradazione, bisognerebbe supporre l'inclinazione maggiore di 90°, e quindi dare alla terza ed alla quarta sfera movimenti nel medesimo senso, contro l'espressa affermazione di Simplicio; ma con ciò non si guadagnerebbe nulla, perchè ne deriverebbero per Marte latitudini superiori a 30°, cosa che Eudosso non poteva certamente ammettere. — Se invece supponiamo la rivoluzione sinodica di 260 giorni, il moto di Marte lungo l'ippopeda diventa quasi tre volte più rapido che nell'altra supposizione; ed in tal caso si può ottenere una retrogradazione sufficientemente conforme al vero, prendendo l'inclinazione di 34°, la lunghezza totale dell'ippopeda di 68°: allora si ottiene

---

(98) *Hist. Mundi* II, 17.

(99) *Ueber Eudoxus.* Abh. der Berl. Akad. für 1830, p. 78.

(100) Vedi sopra la nota (95).

(101) Essendo t il numero dei giorni nella rivoluzione annua solare, z quello della rivoluzione zodiacale d'un pianeta superiore, s quello della rivoluzione sinodica del medesimo pianeta, è noto doversi sempre avere $\frac{1}{t} = \frac{1}{z} + \frac{1}{s}$. Ha conosciuto Eudosso questa relazione? Noi dovremmo dubitarne, considerando i numeri che assegna Simplicio per le rivoluzioni sinodiche e per le zodiacali. Ma noi siamo inclinati a credere, che quei numeri siano stati arrotondati per ragione della memoria, le durate sinodiche essendo espresse in mesi e in decine di giorni, le zodiacali in anni intieri.

una massima digressione in latitudine di 4° 53′, che non è molto diversa dalla vera, e si ha per arco di retrogradazione 16°, che è poco maggiore di quello che generalmente si osserva in questo pianeta. La figura 16 mostra la forma del nodo descritto da Marte intorno alle sue opposizioni in tale supposizione. Questo sufficiente accordo colle osservazioni poteva forse indurre Eudosso ad assumere una rivoluzione sinodica eguale ad un terzo della vera; ma in questa ipotesi si dovevano avere due retrogradazioni fuori dell'opposizione col Sole, e sei stazioni, quattro delle quali intieramente immaginarie. — Noi concludiamo da tutto questo, che qualunque ipotesi fra le due abbia adottato Eudosso, la sua teoria ha fallito intieramente nella sua applicazione al pianeta Marte; e pochi decennj dopo, Callippo dovette pensare a correggerla.

4. Mercurio. Per Mercurio e per Venere il luogo medio coincidendo col luogo medio del Sole, è palese che Eudosso supporre doveva per ambidue il centro dell'ippopeda coincidere costantemente col luogo del Sole. E poichè questo centro dista di un quadrante dell'eclittica dai due poli di rotazione della terza sfera, siccome si è veduto nella generazione di quella curva, ne concludiamo che secondo Eudosso dovevano i poli delle terze sfere di Mercurio e di Venere stare collocati sull'eclittica costantemente in quadratura col Sole, e quindi i poli della terza sfera di Mercurio sempre coincidere coi poli della terza sfera di Venere. Di questa conseguenza della teoria d'Eudosso abbiamo una conferma importante nelle parole di Aristotele (v. Append. I), dove dice, che secondo Eudosso « i poli della terza sfera sono diversi per alcuni pianeti, identici per Afrodite e per Ermes ». Tale coincidenza, non artificialmente invocata, prova ad un tempo l'esattezza della descrizione d'Aristotele e la verità della presente ricostruzione delle teoriche planetarie del grande astronomo di Cnido.

Poichè il luogo medio del pianeta è il centro dell'ippopeda coincidente col Sole, e poichè la massima elongazione del pianeta da quel centro altro non è che la mezza lunghezza dell'ippopeda, ossia l'inclinazione, concluderemo, che la massima digressione in longitudine di quei due pianeti dal Sole sarà appunto uguale alle rispettive inclinazioni; proprietà questa, di cui possiamo affermare con molta probabilità aver fatto uso Eudosso per determinare la inclinazione di quei due pianeti, tanto più che non si vede qual altro mezzo avrebb'egli potuto usare al medesimo scopo, le retrogradazioni di Venere essendo difficili, e quelle di Mercurio impossibili ad osservare (102). Non constando però da Simplicio quale fosse il valore assegnato da Eudosso a quelle massime elongazioni, io ho supposto per Mercurio l'elongazione di 23°, che press'a poco risulta dai calcoli moderni, dalla quale si deduce subito la lunghezza totale dell'ippopeda di Mercurio essere 46°; la mezza larghezza dell'ippopeda, ossia la massima digressione in latitudine essere di 2° 14′. Secondo i moderni, questa digressione è un poco maggiore. La curva descritta da Mercurio ad ogni retrogradazione non forma, secondo quest'ipotesi, un nodo chiuso come le altre, ma soltanto una triplice inflessione, come si vede nella figura 17. Si ha qui un arco di retrogradazione di circa 6°, che è molto minore del vero; ma questo errore cadendo in una parte non osservabile del corso sinodico, non può esser imputato a vizio di questa teoria. Nelle parti visibili di questo corso, le longitudini

(102) Secondo l'opinione di alcuni astronomi, citata da Plinio, Mercurio non diventerebbe mai retrogrado nel Toro, nei Gemelli ed in una parte del Cancro (*Hist. Mundi* II, 17); ciò che dalla teoria di quel pianeta si riconosce essere falso. Esisteva dunque ai tempi di Plinio una teoria di Mercurio, colla quale si calcolavano le retrogradazioni di questo pianeta, che all'osservazione sono affatto inaccessibili.

si possono rappresentare con discreta esattezza, sebbene le epoche delle massime elongazioni non riescano molto conformi al vero.

5. **Venere.** Per la rappresentazione del corso di Venere si devono applicare le cose dette per Mercurio, sebbene il risultamento sia lontano dal corrispondere egualmente alle osservazioni. Ammettendo infatti, secondo i moderni, che l'elongazione massima o l'inclinazione di Venere sia di 46°, se ne ricava la lunghezza totale dell'ippopeda uguale a 92°, e la mezza larghezza o la digressione in latitudine di 8° 54′; il che per caso coincide press'a poco colle massime digressioni di latitudine che effettivamente si osservano in quel pianeta. Ma la durata della rivoluzione di Venere sull'ippopeda (570 giorni secondo Eudosso) essendo quasi doppia della rivoluzione lungo lo zodiaco, la celerità in longitudine del primo moto è sempre molto inferiore a quella del secondo. Onde avviene qui per Venere ciò che già si è veduto per Marte; secondo questa teoria d'Eudosso, Venere non può mai diventar retrograda; nè questo errore si può evitare, qualunque valore ad arbitrio si dia all'inclinazione del pianeta. Tuttavia, dobbiamo notare qui, che le stazioni e le retrogradazioni di Venere generalmente si fanno nei crepuscoli solari, dove è difficile la comparazione di quell'astro colle stelle fisse, e sarebbe anche possibile che Eudosso non avesse neppure alcuna idea della possibilità di quei fenomeni. Ma un altro errore assai grave della sua teoria (in misura minore anche comune colla teoria di Mercurio) stava in questo, che il periodo di 570 giorni della rivoluzione sinodica, doveva, secondo la legge del moto di Venere sulla sua ippopeda, essere diviso in due parti uguali dai due istanti delle massime elongazioni orientale ed occidentale, poichè il moto della terza e della quarta sfera era supposto equabile. Ora nella verità della natura, dei 584 giorni della sua rivoluzione sinodica, Venere ne impiega bene 441 a passare dalla massima elongazione orientale alla occidentale, e soli 143 per ritornare dall'occidentale all'orientale; onde tutta la rivoluzione sinodica è divisa in due parti, le cui durate stanno fra di loro prossimamente come 3 : 1. In conseguenza di questo errore, le epoche delle massime elongazioni possono differire di 70 e più giorni da quelle convenienti alla teoria di Eudosso, sebbene, a cagione del piccolo movimento di Venere rispetto al Sole, in quelle fasi l'errore sulla elongazione dal Sole e sulla posizione di Venere nello zodiaco non superi 10°. Nella parte inferiore del corso per verità gli errori potevano riuscire anche molto maggiori, ma ciò succedeva soltanto nelle vicinanze della congiunzione inferiore, dove il pianeta non era osservabile.

Un difetto poi si mostrava nelle teorie d'Eudosso rispetto al moto in latitudine; difetto sensibile in Venere, più che in ogni altro pianeta. L'ippopeda taglia l'eclittica in quattro punti, cioè due volte nel centro, e una volta in ciascuno degli estremi. Ne segue, che il pianeta ad ogni rivoluzione sinodica deve traversare l'eclittica quattro volte. Ora ciò è lontanissimo dal vero, perchè la parallasse annua in latitudine è nulla due volte ogni anno, cioè quando la Terra traversa la linea dei nodi; quindi solo anche due volte all'anno deve il pianeta trovarsi sul circolo massimo, che segna sulla sfera celeste il suo movimento eliocentrico. La latitudine del pianeta poi è nulla soltanto quando il pianeta è nella linea dei nodi, cioè due volte in ogni rivoluzione siderea. A questi fatti si annette l'altro, che la forma dei flessi e dei nodi della trajettoria apparente nei mesi intorno all'opposizione ed alla congiunzione inferiore, è veramente meno simmetrica, ma assai più semplice che quella risultante dalle ipotesi d'Eudosso. Invece di un nodo ad intersezione quadrupla, si ha generalmente un nodo semplice, e qualche volta anche solamente un flesso contrario (fig. 18). Queste imperfezioni non erano di gran momento nelle teorie di Saturno e di Giove, per i quali il moto in latitudine era impercettibile alle osservazioni di quel tempo. Già di qualche

importanza potevan riguardarsi nelle ipotesi relative a Marte ed a Mercurio; ma più che altrove erano sensibili nel moto di Venere, che può raggiungere una latitudine di nove gradi.

Con queste riflessioni credo d'aver esaurito quanto è possibile con qualche fondamento dimostrare o congetturare intorno alle teorie celesti d'Eudosso. Riassumendone i tratti essenziali, diremo: Che per il Sole e per la Luna queste ipotesi rendevano buon conto di tutti i fenomeni principali, salvo che dell'anomalia dipendente dall'eccentricità, la quale anomalia da Eudosso era ignorata, o almeno non riconosciuta. Per Giove e per Saturno, e in certa misura anche per Mercurio, davano esse una spiegazione generale abbastanza soddisfacente del movimento di longitudine, delle stazioni e delle retrogradazioni, e di altre fasi dipendenti dall'anomalia solare. Più manifesti erano i difetti della teoria in Venere, e grandissimi e apparentissimi in Marte; onde a correggere le ipotesi di questi due pianeti dovettero presto applicarsi i discepoli e successori di Eudosso. I limiti delle digressioni in latitudine risultavano dalle varie ippopede in assai buona proporzione colle digressioni realmente osservate, sebbene i periodi di queste digressioni e i loro luoghi nel ciclo fossero al tutto errati. Sommando però insieme ogni cosa, e tenendo conto anche dell'astronomia pratica di quei tempi, ogni discreto lettore non potrà ricusare di vedere in questo sistema un'invenzione ben degna d'essere ammirata e dagli antichi ed anche dagli astronomi del nostro tempo, i quali non ignorano quanto sia talora difficile la scoperta della verità anche in problemi molto semplici. Ad Eudosso si deve in ogni caso il vanto di aver tentato il primo la spiegazione geometrica della legge con cui varia il primo e più considerabile dei termini periodici onde sono costituite le ineguaglianze planetarie, cioè quel termine che dipende dall'elongazione dei pianeti dal Sole. Che se ad alcuno le sue teorie planetarie paressero ancora molto rozze, faremo riflettere, che Eudosso non impiegò in ciascuna di esse più di tre costanti, o di tre elementi, cioè l'epoca di una congiunzione superiore, la durata della rivoluzione siderale, a cui è connessa la sinodica, e l'inclinazione dell'asse della quarta sfera su quella della terza, che determina per intiero le dimensioni dell'ippopeda. Oggi richiedonsi a tale ufficio sei elementi per ciascun pianeta. La qual circostanza raccomandiamo alla considerazione di coloro, che, guardando le cose superficialmente, hanno rimproverato ad Eudosso la complicazione in un sistema, del quale l'astronomia non vide il più semplice e il più simmetrico fino ai tempi di Keplero.

VII. La riforma di Callippo.

La dottrina delle sfere omocentriche si conservò nella scuola matematica d'Eudosso anche dopo la sua morte, avvenuta intorno all'anno 355, mentre egli si trovava nell'ancor florida età di anni 53. Menecmo, discepolo di Eudosso ed inventore delle sezioni del cono, si trova annoverato fra coloro che si occuparono di queste ipotesi (103). Di Polemarco Ciziceno, che fu familiare d'Eudosso, leggiamo in Simplicio (104) che studiò anch' egli le sfere omocentriche, di cui aveva probabilmente ricevuto la tradizione diretta dal loro autore. Di Polemarco fu compagno di studio e probabilmente discepolo Callippo, il più celebre e il più abile astronomo del suo tempo (105). Callippo, sebbene nato in Cizico, fu forse troppo giovane per profittare della scuola che Eudosso colà avea tenuto, e sembra che delle teorie di questo astro-

(103) Theonis Smyrnaei *Astronomia* ed. Martin, p. 332.

(104) Vedi Appendice II, §§ 7 e 15.

(105) Append. II, § 7. L'età di Callippo può verosimilmente collocarsi fra gli anni 370 e 300 a. C.

nomo fosse istruito per opera di Polemarco. Che che sia di ciò, egli e Polemarco avendo potuto accertarsi, che le ipotesi eudossiane non soddisfacevano in ogni parte alle osservazioni (siccome nell'articolo precedente il lettore ha potuto vedere), sembra che concepissero il pensiero di riformarle e di perfezionarle; e per poter profittare del sapere di Aristotele, già allora considerato come il primo dei filosofi greci dopo la morte di Platone, si recarono insieme in Atene, dove Aristotele insegnava. È credibile che ciò avvenisse durante la seconda dimora di Aristotele in Atene, la quale durò dal 336 al 323 secondo il Grote (106), e nel fiore dell'età di Callippo, che in quest'intervallo appunto aveva stabilito il celebre periodo lunisolare, da lui detto Callippico (107). Ad Aristotele piacevano assai le sfere di Eudosso, come quelle che collimavano bene colle sue idee cosmologiche, e gli permettevano di stabilire esteriormente all'universo il principio motore del tutto, in opposizione ai Pitagorici, che lo volevano collocato nel centro. Intorno al risultamento di questa specie di congresso astronomico non abbiamo che notizie frammentarie. La conseguenza più durevole e più diretta fu di stabilire le sfere d'Eudosso come base futura delle dottrine peripatetiche sui movimenti celesti, la quale in quelle scuole fu bensì posteriormente modificata, ma non mai totalmente abbandonata. Di Callippo è certo, che emendò e corresse in varie parti le teorie d' Eudosso: non è agevole decidere se solo dietro i risultamenti de'suoi proprj studj, o pure anche col concorso d'Aristotele e di Polemarco. La prima supposizione però sembra più verisimile, quando si considera il modo tenuto da Aristotele nel riferire la modificazione introdotta nel sistema di Eudosso, la quale egli attribuisce esclusivamente a Callippo (108). Ma intorno a questa riforma Callippo non lasciò alcuno scritto; alcune notizie ne abbiamo da Aristotele, come pur ora si disse, e altre non molte restano provenienti da Eudemo, per mezzo della tradizione, già sotto altri riguardi da noi verificata come assai sicura, di Sosigene e di Simplicio. Eudemo era contemporaneo ed amico d'Aristotele, e nello scrivere la sua storia dell'astronomia potè ricavare da Aristotele (se non forse da Callippo medesimo) le notizie brevi, ma chiare, che aveva pubblicato sui lavori di Callippo in questa materia. Sventuratamente Simplicio fu poco liberale nelle comunicazioni che estrasse da Sosigene, ed in totale il sistema definitivo di Callippo ci resta assai meno esattamente noto, che quello di Eudosso. Esporrò il poco che si può dire intorno alle riforme di Callippo, considerando parte a parte i varj corpi celesti a cui tali riforme furono applicate.

1. Giove e Saturno. — Per questi due pianeti noi abbiamo fatto notare, che le ipotesi d'Eudosso si adattavano discretamente bene ai fenomeni. Aristotele ci assicura, che Callippo, serbando per essi la medesima disposizione di sfere, che aveva immaginato Eudosso, ne attribuì ad ambidue questi pianeti il medesimo numero. Dunque sembra che Callippo trovasse sufficienti per essi le ipotesi di Eudosso: e si può concludere che la ineguaglianza zodiacale dei medesimi gli rimanesse ancora ignota, sebbene nel suo massimo valore essa arrivi a circa sei gradi, così per l'uno come per l'altro di questi due pianeti. E dobbiamo pure inferire, che egli riguardasse come nulle o come trascurabili le loro digressioni in latitudine.

2. Marte. — I gravissimi errori che la teoria di Eudosso dimostrava per questo pianeta, domandavano una pronta emendazione, e Callippo credette bastasse a ciò l'aggiungere una sola sfera a quelle d'Eudosso. Egli è palese, che questa addizione non dovea riguardare nè

---

(106) Grote, *Aristotle*, p. 9-10 del 1° volume.

(107) Il primo periodo Callippico cominciò l'anno 330.

(108) Vedi l'Appendice I.

il moto diurno, nè il moto zodiacale, ma bensì il moto sinodico, pel quale le due sfere d'Eudosso erano affatto insufficienti a produrre alcuna retrogradazione, a meno di non commettere un grossolano errore sulla durata della rivoluzione sinodica. Ora è certissimo che, serbando il tempo esatto di questa rivoluzione, cioè 780 giorni, si può con tre sfere combinate ottenere una retrogradazione del pianeta nella misura voluta dalle osservazioni, e ciò in varj modi, senza produrre troppo enormi digressioni in latitudine. Il più semplice, e quello che meglio conserva i limiti naturali della latitudine, è questo (fig. 19). Essendo AOB l'eclittica, A e B due punti opposti della medesima, e descriventi il suo intiero perimetro nel tempo della rivoluzione zodiacale, intorno agli stessi si faccia girare una prima sfera nel tempo della rivoluzione sinodica. Un punto qualunque P_1 dell'equatore di questa sfera si assuma come polo di una seconda, la quale giri con velocità doppia in senso contrario alla prima, portando seco il polo P_2 distante di un certo arco $P_1 P_2$, che chiameremo l'*inclinazione*. Intorno al polo P_2 e in senso opposto alla seconda sfera giri, nel medesimo verso che la prima e nel medesimo periodo, una terza sfera, nel cui equatore sia incastrato il pianeta M. È facile comprendere che se all'origine dei tempi i tre punti P_1 P_2 M si trovano ordinati sull'eclittica nell'ordine AP_2P_1MB, dopo qualsiasi tempo l'angolo φ in A sarà uguale all'angolo in P_2 e l'angolo in P_1 sarà doppio di quelli; ed avendosi $AP_1 = MP_2 = 90°$, il pianeta M descriverà lungo l'eclittica e simmetricamente a questa una curva, che varierà di forma secondo il valore che si attribuirà all'inclinazione P_1 P_2. Questa curva, per certi valori dell'inclinazione, si estenderà molto in longitudine e poco in latitudine, ed avendo un centro nel punto O posto in mezzo fra i poli A e B, produrrà, funzionando in modo affatto analogo all'ippopeda, un moto diretto e retrogrado in longitudine, ma avrà sull'ippopeda il vantaggio di poter dare al pianeta nelle vicinanze di O una velocità diretta e retrograda molto maggiore di quella che potrebbe dare l'ippopeda d'Eudosso, dotata della stessa larghezza nel senso della latitudine. Quindi la possibilità di rendere retrogrado il pianeta anche in casi, dove l'ippopeda d'Eudosso è insufficiente a questo scopo.

Se, per esempio, supponiamo P_1P_2 uguale ad un ottavo di circonferenza, si trova che la curva descritta dal pianeta ha la forma disegnata approssimativamente sulla figura 19. La massima digressione in latitudine non eccede 4° 11': la curva poi occupa in longitudine sull'eclittica 95° $\frac{1}{3}$, ed ha due nodi tripli collocati verso le estremità, a 45° dal centro O. Durante una rivoluzione sinodica, il pianeta percorre innanzi e indietro una rivoluzione intiera su questa curva, dilungandosi dalla sua posizione media O di 47° $\frac{2}{3}$ da una parte e dall'altra. La velocità del moto diretto e retrogrado di longitudine quando il pianeta è al centro in O è 1, 2929 volte la velocità del polo P_1 intorno all'asse AB. Essendo ora la rivoluzione di P_1 intorno ad AB eguale alla rivoluzione sinodica di Marte, cioè a 780 giorni, la velocità diurna sinodica di P sarà di $\frac{360°}{780}$, ossia di 0° 462 ogni giorno; ciò che moltiplicato per 1,2929 dà 0°,597 per velocità diurna del moto retrogrado sinodico del pianeta sulla curva rispetto ad O, prodotto dalle tre sfere del moto sinodico. Ma poichè il punto O dalla sfera del moto zodiacale è portato con moto diretto lungo l'eclittica in ragione di 0° 525 al giorno (109), così in ultima analisi il pianeta potrà nelle retrogradazioni moversi contro l'ordine dei segni in ragione di 0°, 597 — 0,°525, ossia di 0°, 072 al giorno: ciò che basta per rappresentare i fe-

(109) Supponendo che la rivoluzione zodiacale di Marte sia di 686 giorni, si ha il moto diurno zodiacale diretto $= \frac{360°}{686} = 0°, 525$.

nomeni di Marte con una certa approssimazione. E si potrebbero ottenere risultati anche più prossimi al vero aumentando d'alquanto l'inclinazione $P_1 P_2$.

Circa il moto di latitudine, non si ottiene qui alcun risultato migliore che coll'ippopeda: ad ogni rivoluzione periodica il pianeta tocca quattro volte il limite boreale, quattro volte il limite australe (sempre nella latitudine $\pm 4^\circ 11'$), e traversa otto volte l'eclittica, cioè due volte nel centro O della curva, e tre volte in ciascuno dei due nodi. Ma credo necessario avvertire che, sebbene questa sia forse la soluzione più semplice, e quindi anche la più probabile che Callippo potesse dare dei movimenti di Marte coll'addizione di una sola sfera, non possiamo dire con certezza, che tale veramente fosse quella dell'astronomo Ciziceno, niente trovandosi nelle antiche fonti, che possa illuminarci su tale proposito.

3. Mercurio e Venere. — Come per Marte, così pure per Mercurio e per Venere, Callippo aggiunse una sfera per emendare le teorie ancora molto imperfette, che Eudosso aveva per essi proposto. Per Venere si ottiene una rappresentazione alquanto migliore dei movimenti adottando l'artifizio che abbiamo già indicato per Marte, e surrogando all'ippopeda di Eudosso la curva nodata della figura 19. Infatti, ponendo l'inclinazione uguale a un ottavo di circonferenza, e facendo coincidere costantemente il centro della curva col Sole, si ottengono massime elongazioni di $47^\circ \frac{2}{3}$, che molto si avvicinano alle vere. Anche la rapidità con cui Venere dall'elongazione massima orientale passa all'occidentale è meglio imitata: perchè nella curva della figura 19, il passaggio da un nodo triplo all'altro nodo si fa in un quarto del tempo sinodico, in un altro quarto il passaggio inverso, i due quarti rimanenti essendo impiegati a percorrere con moto lentissimo le piccole foglie che emergono verso le due estremità, delle quali l'estensione in longitudine è appena di $2^\circ \frac{2}{3}$. Con questo mezzo però non si riesce ad ottenere per Venere un moto retrogrado nella congiunzione inferiore, nè a questo scopo ho potuto pervenire in modo adatto, immaginando altre combinazioni di sfere (110). Forse a Callippo, come ad Eudosso, era ignota l'esistenza di quel moto retrogrado.

Per Mercurio la teoria di Eudosso già dava una discreta approssimazione, e non vi è dubbio che in varj modi l'applicazione di una nuova sfera poteva rendere questa approssimazione anche più soddisfacente. L'incertezza in questo caso è grande, onde lascio ad altri il proporre supposizioni plausibili e probabili su quest'argomento, se pure nella totale mancanza d'indicazioni sarà mai possibile che ciò si possa fare.

4. Sole. — Secondo che riferisce Eudemo, Callippo aveva aggiunto due sfere nella teoria del Sole per rappresentare l'anomalia del suo movimento in longitudine, scoperta cento anni prima da Metone e da Eutemone (111). Tale anomalia si manifestava agli astronomi di quel tempo per mezzo delle ineguaglianze dei quattro intervalli, in cui la durata totale dell'anno era divisa dagli istanti dei due equinozj e dei due solstizj. Per un felice evento, si sono conservate nel Papiro d'Eudosso, già più volte nominato in questa Memoria, le quattro durate che Callippo attribuiva ai suddetti intervalli (112), onde possiamo farci un'idea della teoria

(110) Infatti il moto medio diurno sinodico di Venere essendo $\frac{360^\circ}{570} = 0^\circ,632$ secondo Eudosso, si può, coll'ajuto del meccanismo della fig. 19, produrre nel pianeta un moto retrogrado di $0^\circ,632 \times 1,2929$, ossia di $0^\circ 817$. Ma il moto diretto zodiacale nel punto O essendo uguale a quello del Sole, cioè a $0^\circ,986$ per giorno, il moto risultante del pianeta sotto il Sole sarà ancora diretto, ed aguale a $0^\circ,169$ per giorno. Si può veramente, con certe combinazioni di sfere, produrre una retrogradazione; ma in tutti i modi da me esaminati questa retrogradazione era accompagnata da movimenti inammissibili in latitudine, o da elongazioni impossibili rispetto al Sole.

(111) V. Append. II, § 7.

(112) V. Boeckh, *Ueber die vierjährige Sonnenkreise der Alten*, p. 46.

solare di quest'astronomo. Le durate in questione desunse l'autore del Papiro dal *Parapegma* o calendario meteorologico di Callippo, e sono quindi necessariamente espresse soltanto in numeri intieri di giorni, ciò che è necessario tener a mente nell'esaminarle. La tavoletta seguente dà nella seconda colonna le durate di quei quattro intervalli, quali il papiro attribuisce a Callippo: nella terza dà le durate che egli avrebbe dovuto trovare secondo la teoria dei moderni (113) nell'anno 330 prima di Cristo: la quarta colonna dà gli errori commessi da Callippo nell'estimare i quattro intervalli. Le tre ultime colonne danno, secondo l'autorità dello stesso papiro (114), gli analoghi elementi per la teoria solare d'Eutemone, il quale osservò intorno al 430: ciò per uso di comparazione.

Intervalli	Nel 330, secondo		Errore di Callippo	Nel 430, secondo		Errore di Eutemone
	Callippo	i moderni		Eutemone	i moderni	
	g.	g.	g.	g.	g.	g.
Equinozio di primavera . — Solstizio estivo	94	94,17	−0,17	93	94,23	−1,23
Solstizio estivo — Equinozio d'autunno	92	92,08	−0,08	90	92,01	−2,01
Equinozio d'autunno — Solstizio d'inverno	89	88,57	+0,43	90	88,52	+1,48
Solstizio d'inverno — Equinozio di primavera	90	90,44	−0,44	92	90,50	+1,50

Questa tavola dimostra a colpo d'occhio quali progressi avesse fatto l'osservazione del Sole in Grecia durante il secolo 430-330 a. C. Gli errori di Callippo non arrivano in nessun caso alla metà di un giorno; e quindi le durate da lui assegnate nel Parapegma sono tanto esatte, quanto è possibile darle indicandole con un numero intero di giorni. Gli errori di Eutemone vanno fino a due giorni intieri. È importante riflettere, che queste determinazioni non appartengono al genere di quelle che diventano sempre più perfette a misura che si prolungano le osservazioni per anni e per secoli, nelle quali il vantaggio è sempre dei più moderni (come per esempio accade nella determinazione dei medj movimenti). Lo studio dell'anomalia del moto solare non trae alcun vantaggio dal tempo; ma solo progredisce colla perfezione dei metodi d'osservazione, e il paragone dei risultati di Eutemone con quelli di Callippo mostra di quanto il secondo avesse perfezionato l'opera del primo.

Non può esservi il minimo dubbio, che se noi possedessimo l'esatta espressione dei risultamenti da Callippo ottenuti colle sue osservazioni equinoziali e solstiziali, se ne potrebbero ricavare per gli elementi dell'anomalia solare valori assai prossimi al vero. Eudemo narra, che per rappresentare questa anomalia, Callippo impiegava due sfere; ed appena è lecito dubitare, che l'artificio da lui usato per render conto dell'alternata accelerazione e ritardazione del moto solare fosse identico a quello che Eudosso impiegava per rappresentare l'anomalia sinodica dei pianeti, la quale, sebbene molto più sensibile che l'anomalia del Sole, appa-

(113) Queste durate, secondo i moderni, furono calcolate supponendo che il perigeo solare avanzi di 61″ 7 ogni anno rispetto ai punti equinoziali, e che l'eccentricità diminuisca di 4,24 unità della settima decimale ogni anno.

(114) V. Boeckh, *Ueber die vierjährige Sonnenkreise der Alten*, p. 46.

riva allora analoga ne'suoi effetti. Conservando le tre sfere date da Eudosso nel loro ordine e positura (115), Callippo non ebbe a far altro, che aggiungere due sfere, di cui la prima avesse i poli nella terza sfera d'Eudosso, descriventi il circolo solare con moto uniforme nello spazio di un anno; la seconda, portante il Sole, avesse i poli sulla prima e un asse alquanto inclinato all'asse di questa, con velocità uguale e contraria. Dando all'inclinazione un valore uguale a quello dell'anomalia massima (che risultava a Callippo, come a noi, di circa 2 gradi), l'ippopeda solare derivante dal moto delle due nuove sfere prendeva in lunghezza sull'eclittica 4° gradi, con la digressione in latitudine di appena 1′ dalle due parti dell'eclittica. La perfezione, con cui questa ipotesi è capace di rappresentare il moto del Sole in longitudine è quasi uguale a quella che più tardi si raggiunse coll'eccentrico e coll'epiciclo, e l'errore non tocca che i quadrati dell'eccentricità. La durata dell'anno solare per Callippo era di 365 $1/4$ giorni come per Eudosso, siccome risulta dalla considerazione del periodo callippico, in cui 76 anni si suppongono comprendere esattamente 27759 giorni (116).

5. LUNA. Callippo aveva rettificato altresì con diligenza il moto della Luna, da lui conosciuto assai più esattamente che da Metone; il periodo callippico di 27759 giorni era supposto abbracciare esattamente 940 lune, onde si ha per durata della lunazione 29 giorni, 12 ore, 44 minuti e quasi 13 secondi; ciò supera la vera durata di soli 10 secondi. Callippo aveva aggiunto alle tre sfere lunari di Eudosso altre due, le quali, se avessimo ad interpretare alla lettera quanto dice Simplicio su tale proposito (117), dovremmo credere fossero state introdotte ancora a cagione delle anomalie scoperte nel moto del Sole da Metone e da Eutemone. A prima giunta parrebbe singolare questo correggere la teoria di un astro per causa delle anomalie di un altro. L'indicazione del buon Peripatetico tuttavia potrebbe per avventura non essere tanto priva di senso; infatti, se per esempio Callippo avesse ignorato l'anomalia propria della Luna, e avesse riputato necessario di conservare una durata esattamente uguale a tutte le lunazioni, egli avrebbe potuto essere condotto ad introdurre nel moto della Luna in longitudine una anomalia esattamente uguale alla anomalia del moto solare. Tuttavia, io credo assai più probabile, che Simplicio per amor di brevità abbia raccolte insieme in un fascio le indicazioni relative al Sole ed alla Luna, forse mosso da ciò, che Callippo aveva aggiunto a questi due astri un egual numero di sfere. E penso di accostarmi più alla verità, supponendo che l'addizione di due sfere fosse determinata per la Luna da una causa non identica, ma analoga a quella che aveva determinato la medesima addizione pel Sole; cioè dall'anomalia del moto lunare in longitudine, la quale importando qualche volta fino ad 8 gradi, dovea esser presto sensibile, specialmente confrontando fra loro gl'intervalli di tempo occorsi fra più eclissi consecutive di Luna e le longitudini corrispondenti di questo astro, in tal caso facilissime a dedursi da quelle del Sole. Poteva allora quest'anomalia rappresentarsi assai bene con due sfere, analoghe alle due aggiunte al Sole, e giranti l'una contro l'altra nella durata del mese anomalistico (118). L'inclinazione in questo caso avrebbe

(115) L'aver Callippo conservata anche la terza delle sfere solari d'Eudosso, mostra che anch'egli ammetteva la nutazione dell'orbe solare rispetto all'eclittica fissa, di che a lungo si è ragionato nell'articolo IV.

(116) BAILLY, *Hist. de l'Astr. ancienne*, I, p. 249.

(117) Append. II, § 7.

(118) Con questa parola non intendo affermare, che Callippo già conoscesse la differenza tra il mese anomalistico e il mese sidereo, e avesse notizia del moto degli apsidi dell'orbe lunare. Se da una parte si può far notare, che egli fu assiduo osservatore della Luna, e che il suo coetaneo e compatriota Elicone si occupava nella predizione delle eclissi; si può in contrario anche dire, che la scoperta del moto degli apsidi richiede molte condizioni che non sappiamo se fossero riunite allora nell'astronomo Ciziceno. Trenta o quarant'anni prima, Eudosso ignorava persino l'eccentricità dell'orbe lunare. Meglio è dunque lasciar la questione sospesa.

dovuto esser uguale alla massima anomalia della Luna, che è in media di 6°; l'ippopeda lunare avrebbe avuto 12° di lunghezza, e la massima sua digressione dal circolo lunare non eccedendo 9′, ne veniva una perturbazione affatto insensibile nel moto di latitudine. Anche per la Luna dunque potevano con queste supposizioni rappresentarsi i fenomeni altrettanto bene che con qualunque altra teoria immaginata prima della scoperta dell'evezione.

Ecco quanto è possibile dire, senza correr pericolo di perdersi in vane congetture, intorno alle correzioni che Callippo aveva apportato alle ipotesi d'Eudosso. Egli aveva paragonato la teoria allora ricevuta col risultato delle osservazioni; aveva trovato delle differenze; conseguentemente si era ingegnato di togliere queste differenze, correggendo le ipotesi anteriori. Procedimento di natura intieramente scientifica, che sarà degnamente apprezzato da chi nel giudicare del merito di quegli antichi investigatori saprà distinguere *il metodo*, che imprime alle ricerche il loro vero carattere, *dai mezzi e dagli strumenti*, che sono circostanze puramente accidentali. Eudosso e Callippo non ebbero strumenti esatti, non ebbero il soccorso della trigonometria; ajutandosi però con costruzioni grafiche, e forse anche con quel ramo della meccanica cui i Greci davano il nome speciale di *sferopea* (σφαιροποιία), e che sembra fosse allora assai più necessario e più importante che non adesso (119), essi riuscirono ad acquistare un'idea esatta del movimento risultante dalla combinazione di tante sfere, e seppero adattarne la disposizione ai fenomeni. È certo, che questi mezzi, proporzionati alle esigenze del tempo, allora bastavano a tutti i problemi dell'astronomia teorica e pratica, e che esisteva allora veramente un'*Astronomia senza Trigonometria;* che che abbia in proposito creduto un celebre istorico della nostra scienza, il quale in essa sembra non abbia mai voluto veder altro, che l'occasione di sviluppare una immensa massa di formole trigonometriche, ed ha preso questo bel criterio per base dei suoi giudizj sopra tutti gli astronomi antichi e moderni.

VIII. Ulteriori modificazioni fatte al sistema d'Eudosso.

I sistemi di Eudosso e di Callippo erano, come già si è fatto notare, semplici costruzioni geometriche ideate per soddisfare alla domanda proposta da Platone, « con quali supposizioni di movimenti regolari ed ordinati si potessero rappresentare le apparenze osservate nel corso dei pianeti ». Come si producessero i movimenti di queste sfere, gli autori del sistema non avrebbero saputo dirlo, probabilmente perchè, come astronomi ed osservatori, essi riguardavano il problema delle cause come fuori di loro competenza, e come appartenente piuttosto alla fisica. Ch'essi dunque siano stati gli autori delle sfere solide di cristallo, che furono e sono tuttavia occasione di tanti dispregiativi epifonemi, è una pura supposizione, la quale non ha in sè il minimo fondamento istorico. Eudosso e Callippo non si occuparono neppure del problema di connettere fra di loro i movimenti delle diverse sfere; per essi le sfere di un pianeta formavano un sistema affatto indipendente dalle sfere di un altro, per la semplice ragione, che a spiegare il movimento di ciascun pianeta occorrevano ipotesi adatte specialmente a quello, e indipendenti dalle ipotesi relative agli altri pianeti.

Il problema di connettere in un tutto unico e sistematico l'intiera serie dei movimenti, rendendo le sfere inferiori dipendenti dalle superiori, si presentò invece ad Aristotele, il quale vedeva in una tal connessione meccanica il modo di far valere l'idea fondamentale della sua dinamica cosmica, secondo la quale la forza motrice dell'Universo dovea esser collocata alla

(119) Secondo gli antichi, *sferopea* (arte di costruire le sfere) chiamavasi quella parte della meccanica che ha per oggetto l'imitazione materiale dei movimenti celesti. V. Proclo, *Comm. Eucl.*, pag. 41, ed. Friedlein.

circonferenza e propagarsi fino al centro. Per tal fine egli immaginò di collegare insieme tutte le sfere proposte da Callippo: ad evitare però che i movimenti degli astri superiori si comunicassero agli inferiori, egli, dopo l'ultima e più interiore sfera di ciascun pianeta, e prima della sfera più esterna del pianeta immediatamente inferiore, intercalò un certo numero di sfere nuove, da lui chiamate *reagenti.* Il modo loro di operare è stato lungamente descritto da Sosigene nel passo che di lui si riporta nell'Appendice II a questa Memoria (§§ 8-13); brevemente si può riassumere così. Siano, per esempio, A B C D le quattro sfere callippiche di Saturno. A la più esteriore, D l'ultima o la più interna, la quale porta in sè incastrato il pianeta, e partecipa ai movimenti delle altre. Se interiormente nella D introduciamo una prima sfera reagente D' ruotante sui medesimi poli che D con uguale ma contraria velocità, le rotazioni di D e D' si distruggeranno, ed ogni punto di D' si muoverà come se fosse connesso invariabilmente colla sfera C. Attaccando dunque entro D' una seconda sfera reagente C' ruotante sui medesimi poli che C con uguale ma contraria velocità, le rotazioni di C e C' si distruggeranno, ed ogni punto di C' si muoverà come se fosse connesso invariabilmente colla sfera B. Onde, finalmente, attaccando entro C' una terza reagente B' ruotante sui medesimi poli che la B con uguale ma contraria velocità, le rotazioni di B e B' si distruggeranno, ed ogni punto di B' si muoverà come se fosse invariabilmente connesso colla sfera A. Ma la sfera A avendo per supposizione il moto delle fisse, anche la B' si muoverà al modo di quelle; e per conseguenza la sfera di Giove si potrà disporre entro B', come se tutte le sfere di Saturno non esistessero, e come se B' fosse la sfera stessa delle stelle fisse.

Con questo ragionamento si vede, che quando n è il numero delle sfere deferenti di un pianeta qualunque, l'addizione di n-1 reagenti distrugge l'effetto di altrettante delle prime, ed impedisce alle sfere inferiori di essere disturbate dai movimenti delle superiori. Ed è chiaro altresì, che per la Luna, che è l'ultimo dei pianeti, non occorrono sfere reagenti. Ecco il numero delle sfere deferenti e reagenti supposto da Aristotele, dietro le ipotesi di Callippo:

		deferenti	reagenti
per	Saturno	4	3
»	Giove	4	3
»	Marte	5	4
»	Mercurio	5	4
»	Venere	5	4
»	Sole	5	4
»	Luna	5	0
	Somma	33	22

Il totale è 55, come Aristotele afferma. Sembra però che Aristotele abbia considerato la cosa alquanto superficialmente, perchè in questo numero vi sono sei sfere inutili. Infatti, poichè l'ultima reagente di Saturno ha il moto delle fisse, e la prima deferente di Giove secondo Callippo ha pure il moto delle fisse, queste due sfere, le quali sono contigue, hanno esattamente il medesimo movimento intorno ai medesimi poli, e possono essere surrogate da una sfera unica. Così pure si possono surrogare con una sola l'ultima reagente di Giove e la prima deferente di Marte: con un'altra l'ultima reagente di Marte e la prima deferente di Mercurio, ecc. Un altro abbaglio sembra aver preso Aristotele, circa il quale i suoi numerosi commentatori si sono dati inutilmente una gran pena per giustificarlo. Dice lo Stagirita, che se al Sole e alla Luna non si aggiungano le due sfere introdotte da Callippo, il numero totale

delle sfere deferenti e reagenti si riduce a 47. Ora il vero numero, com'è facile a calcolare, è in questo caso 49. Veggasi nell'Appendice II quanto discorrono Sosigene e Simplicio intorno a tal questione, per noi poco importante.

Di quello che dopo Callippo e Aristotele si fece intorno al sistema delle sfere omocentriche, siamo pochissimo informati. Teofrasto se n' era occupato, e due volte lo troviamo citato in proposito (120). Eudemo lo conosceva, e sapeva anche assegnare le ragioni delle mutazioni introdotte da Callippo. A lui più che ad ogni altro dobbiamo quanto si conosce intorno alle sfere omocentriche. Quali ulteriori emendazioni abbia subito nelle scuole peripatetiche, è impossibile sapere. Bensì appendiamo da Simplicio, che fin dai primi tempi fu posta innanzi la formidabile obbiezione, che dovea render il sistema inammissibile, quella cioè che si deduce dalla variabilità di splendore dei pianeti, principalmente di Marte e di Venere, la quale conduceva ad ammettere una variazione nelle loro distanze dalla Terra, fatto assolutamente inconciliabile colla concentricità di tutte le sfere intorno al centro della Terra. A tale obbiezione aveva già dovuto rispondere lo stesso Polemarco, uno dei membri dell'assemblea astronomica tenuta in Atene. Queste difficoltà crebbero e divennero insuperabili, quando si scoperse la variazione dei diametri apparenti del Sole e della Luna, e Sosigene, benchè peripatetico egli stesso, sembra non abbia poco contribuito ad atterrare il sistema, dimostrando questa variabilità. Oltre a quanto disse su tal questione ne' suoi commentarj all'opera di Aristotele *De Cœlo*, Sosigene aveva scritto in proposito un'opera περὶ τῶν ἀνελιττουσῶν, che trattava espressamente delle sfere omocentriche. L'unico passo che ci fu conservato di quest'opera (121), riguarda appunto i diametri del Sole e della Luna, e ci conduce a concludere con probabilità, che essa fosse pure diretta a confutare le ipotesi d'Eudosso, e a dimostrare ch'esse non soddisfanno alle osservazioni.

Fra gli astronomi che cercarono di spiegare il corso dei corpi celesti colle sfere omocentriche sarebbe a mettere anche Autolico, l'autore di due noti opuscoli, ancora esistenti, sulle nozioni più elementari del moto diurno e del levare e tramontare eliaco degli astri (122). Sventuratamente, quanto dice Sosigene sui tentativi fatti da Autolico per ispiegare come i pianeti appajano ora più, ora meno luminosi, non ci dà alcuna informazione positiva, e neppure ci permette di affermare, che le sue ipotesi fossero analoghe a quelle di Eudosso e di Callippo (V. Appendice II, § 14). A noi non resta a far altro che aggiungere il nome di Autolico a quello dei Greci, che prima di Ipparco si occuparono di ordinare la teoria dell'Universo secondo i fenomeni.

Esaminando i sistemi cosmici dei Greci nell'intervallo di tempo trascorso fra Eudosso ed Ipparco (360-125), troviamo che in quest'epoca le opinioni furono divise in molti partiti. Perchè, mentre gli ultimi dei Pitagorici si attenevano al sistema degli eccentri mobili (123), Eraclide

(120) V. Append. II, §§ 2 e 13.

(121) Procli, *Hypotyposes*, ed. Halma, p. 111. Vedi pure la nota (31) dell'Appendice II in fine di questa Memoria.

(122) Analizzati da Delambre, *Astr. ancienne* I, p. 19-48.

(123) Il sistema degli eccentri mobili, di cui gli storici dell'astronomia non fanno parola, si trova menzionato da varj autori antichi, cioè Gemino, Nicomaco, Proclo e Teone da Smirne; il quale ultimo, trascrivendo Adrasto Peripatetico, ne dà notizia più ampia e più precisa degli altri. Questo sistema è una varietà di quello che fu poi detto Ticonico, ed in esso si deve riconoscere il gradino naturale che condusse alcuni Greci all'idea Copernicana, siccome spero di dimostrare in altra circostanza. Nel mio lavoro *Sui precursori di Copernico* ebbi occasione di constatare una lacuna nel corso delle idee che guidarono Aristarco, ed altri prima di lui, all'adozione del sistema eliocentrico. Più tardi riconobbi che tal lacuna è appunto riempita dal sistema degli eccentri mobili, al quale in quel tempo io non aveva ancora prestato la dovuta attenzione.

Pontico già sapeva, esser possibile di spiegare i fenomeni nel modo che fu poi adottato da Copernico, e Aristarco aveva proposto formalmente la stessa ipotesi. Altri invece presero a coltivare la teoria degli epicicli, fra questi Apollonio da Perga, e dopo Apollonio, Ipparco. Malgrado questa concorrenza di opinioni, pare che le sfere di Eudosso fino ai tempi d'Archimede, cioè fino alla fine del terzo secolo avanti Cristo, tenessero il principato non solo nelle scuole aristoteliche, ma anche presso gli astronomi. A questa conclusione mi conducono alcune parole di Archimede nell'*Arenario*, alle quali non sembra che finora siasi prestata molta attenzione: « La maggior parte degli astronomi, dic'egli, suole chiamare *mondo* una sfera, di cui il centro è il centro della Terra, e il raggio è uguale alla retta condotta fra il centro del Sole e il centro della Terra » (124). Questi astronomi, secondo i quali il Sole era ai confini del mondo, non potevano certamente essere nè i Pitagorici coi loro eccentri mobili, nè Apollonio co' suoi epicicli, nè infine Aristarco. Ma potevano essere appunto i fautori delle sfere d'Eudosso e di Callippo. Perchè Eudosso avea notizia soltanto delle distanze della Luna e del Sole, e sapeva che questo era circa nove volte più lontano di quella. Rispetto alle distanze degli altri pianeti (che generalmente in quel tempo da tutti erano collocati sopra il Sole), nulla vi era di determinato, ed è probabilissimo che, per non supporre intervalli inutili, dei quali non si vedeva alcuno scopo, le sfere motrici di quelli si supponessero vicinissime o coincidenti fra loro, poste sopra il Sole a piccolissima distanza, e vicinissime pure alla sfera limite del mondo, cioè a quella delle stelle fisse, dalle quali i cinque pianeti non si distinguevano che per la varietà dei movimenti. Nè il grado di universalità, che Archimede attribuisce all'opinione da lui riferita, ad alcun'altra opinione meglio si attaglia, che a quella delle sfere, in un'epoca, in cui le scuole peripatetiche erano in grandissimo onore.

Combinando poi questa deduzione con quanto gli antichi scrittori ci narrano delle sfere artificiali costruite da Archimede, si potrebbe forse con qualche apparenza di probabilità argomentare, che tali sfere artificiali fossero costruite dietro i principj del sistema di Eudosso e di Callippo. Questo sistema infatti era allora sufficientemente elaborato nelle sue parti per servire ad una imitazione materiale; ciò che non sembra si possa dire degli altri sistemi meno universalmente diffusi nelle scuole. Inoltre è da notare, che il sistema delle sfere omocentriche, per la sua elegante simmetria, sembra fatto apposta per esser tradotto in ingegnosi e semplici meccanismi coll'arte della *sferopea*, siccome chi ha meditato alquanto sulla struttura di quel sistema può agevolmente riconoscere. Queste sono però semplici congetture, che pongo in mezzo come argomento di ulteriori investigazioni.

Più tardi, le diversità di splendore occorrenti in Marte ed in Venere, e la constatata variazione dei diametri apparenti del Sole e della Luna, avendo reso inutile ogni sforzo per evitare nel sistema dell'Universo l'irregolarità e la asimmetria proveniente da movimenti eccentrici, la parte geometrica e più interessante del sistema delle sfere dovette cedere all'evidenza dei fenomeni, e cominciò il trionfo degli epicicli. Le scuole aristoteliche allora non avevano ancora chiuso l'occhio e l'orecchio al linguaggio della natura, ed i loro dogmi non si erano ancora cristallizzati sul modello dello Stagirita e de' suoi commentatori. Vediamo quindi Sosigene stesso, uno dei Peripatetici, riconoscere come ulteriormente inammissibile la rigorosa simmetria dell'Universo intorno al centro; e non meno lealmente vediamo più tardi confessata la stessa cosa da Simplicio. Quei nobili filosofi, accogliendo la verità quale risultava dall'osservazione empirica (esempio troppo poco imitato da certi moderni capiscuola), tenta-

---

(124) Vedi l'*Arenario* nell'Archimede di Torelli, p. 319.

rono di mettere d'accordo con essa le conseguenze che derivavano dai principj fondamentali della loro scuola. Da questa tendenza nacque una trasformazione del sistema delle sfere, nella quale fu ammesso l'epiciclo sotto forma di una sfera minore incastrata nella grossezza delle sfere maggiori. Nella figura 21, sia O il centro del mondo, ILKM un deferente concentrico, I il centro di un epiciclo; è manifesto che se con raggi uguali ad OA OB descriviamo intorno ad O due superficie sferiche, BDCE e AFHG, e consideriamo come sfera del pianeta lo strato sferico fra esse compreso; se inoltre immaginiamo che l'epiciclo si costituisca come equatore di una sfera minore AB compresa nella grossezza di quello strato, e che su tale equatore si trovi il pianeta; è palese, che la rotazione simultanea dello strato sferico intorno all'asse del circolo ILKM e della sfera minore intorno all'asse dell'epiciclo I, produrrà lo stesso effetto, che il movimento dell'epiciclo sul deferente, e del pianeta sull'epiciclo. Tale è il sistema delle sfere solide, quale si trova, per esempio, descritto da Adrasto Peripatetico negli estratti che di lui ha dato Teone Smirneo nel suo libro dell'*Astronomia*, e quale fu ripetuto poi da molti scrittori posteriori fino al secolo XVII, con o senza modificazioni. Questa costruzione forse poteva ancora, fino ad un certo punto, corrispondere alle idee cosmologiche degli Aristotelici, ed in tal senso poteva esser considerata come una derivazione del sistema omocentrico. Ma geometricamente parlando, al sistema omocentrico fu implicitamente e intieramente rinunziato dall'istante, in cui fu ammesso nell'Universo un solo movimento eccentrico rispetto al centro del mondo; e le sfere solide, più che una filiazione delle dottrine d'Eudosso, sono un travestimento di quella degli epicicli. Vera dottrina omocentrica si trova invece ancora presso Alpetragio Arabo, presso Girolamo Fracastoro, e presso il Cosentino G. B. Amici, dei quali il primo nel secolo XII, il secondo ed il terzo nel secolo XVI tentarono nuovamente di spiegare i movimenti celesti con sfere concentriche, rigettando gli eccentri e il moto epiciclico. Ma questi frutti tardivi più non appartengono allo sviluppo organico della scienza, e non formano più parte essenziale della sua storia. Terminerò dunque a questo punto le mie indagini, e sarò pago, se il lettore nel percorrere la presente Memoria avrà provato una piccola parte del piacere, che io ho provato nello scriverla.

APPENDICE I.

Estratto dal libro XII della Metafisica d'Aristotele — Capo VIII (1).

Eudosso suppose che il Sole e la Luna fossero mossi ciascuno da tre sfere, delle quali la prima è quella (che si move al modo) delle stelle fisse, la seconda (si move) secondo il (circolo) che passa per lo mezzo dei segni zodiacali, la terza secondo un (circolo) collocato obliquamente nella larghezza della zona zodiacale. (Di questi circoli obliqui) quello secondo cui si muove la Luna è inclinato in maggior latitudine che quello secondo cui si muove il Sole. (E dice), i pianeti esser portati ciascuno da quattro sfere, delle quali la prima e la seconda sono le medesime che per il Sole e per la Luna; perchè quella delle stelle fisse appartiene a tutti, e quella che le succede e produce il movimento lungo lo zodiaco è comune a tutti. Ed i poli della terza esser per tutti collocati sul circolo mediano dei segni; della quarta poi il movimento farsi se-

(1) ARISTOTELES, *Græce ex recensione Immanuelis Bekkeri edidit Academia Regia Borussica.* Tom. II, pag. 1073-1074. Berolini 1831.

condo un circolo obliquo rispetto al mezzo della precedente (2). I poli della terza sfera essere diversi per alcuni pianeti, identici per Afrodite e per Ermes.

Callippo suppose la medesima disposizione di sfere che Eudosso, cioè la medesima successione delle distanze (delle varie sfere d'un medesimo astro): e attribuì a Giove ed a Crono il medesimo numero (di sfere, che Eudosso); ma pel Sole e per la Luna opinò doversi aggiungere due sfere (a ciascuno) per rendere ragione delle apparenze: ai pianeti rimanenti, una per ciascuno.

Ma affinchè dalla simultanea combinazione di tutte (le sfere) si renda ragione delle apparenze, è necessario, per ciascuno dei pianeti, vi siano (oltre alle precedenti), altrettante sfere reagenti (3) meno una, le quali restituiscano sempre alla medesima posizione la prima sfera dell'astro immediatamente inferiore; perchè così soltanto avviene che si producano i movimenti dei pianeti. Ora, essendo le sfere, in cui si muovono, da una parte otto, e d'altra parte venticinque (4), di esse soltanto quelle non dovranno esser rigirate all'indietro, dalle quali dipende il movimento dell'infimo di tutti (gli astri) (5). Pei due primi (astri) le (sfere) reagenti saranno dunque sei, e per i quattro che seguono, sedici; e il numero totale delle sfere motrici e reagenti sarà di cinquantacinque. Che se al Sole ed alla Luna non si aggiungano i movimenti che abbiamo detto, il numero totale delle sfere sarà di quarantasette (6).

APPENDICE II.

Estratto dal Commentario di Simplicio al libro secondo di Aristotele, De Cœlo (1).

1. Primo dei Greci, Eudosso di Cnido (come narrò Eudemo nel secondo libro della *Storia dell'Astronomia*, e Sosigene dietro l'autorità d'Eudemo) dicesi aver per mezzo di simili ipotesi tentato di sciogliere il problema proposto, come narra Sosigene, da Platone a quelli che di tali cose si occupavano; con quali supposizioni cioè di moti regolari ed ordinati si potessero rappresentare i fenomeni osservati nei movimenti dei pianeti... Eudosso di Cnido assunse a tal bisogno l'ipotesi delle sfere dette revolventi (2).

---

(2) Intende senza dubbio l'*equatore* della sfera precedente.

(3) ἀνελιττούσας, cioè rivolgenti in senso contrario. Lo stesso termine è dai posteriori, come Sosigene e Simplicio, preso in più ampio significato, e comprende tutte le sfere del sistema, sia deferenti, che reagenti: nel qual caso abbiam tradotto lo stesso vocabolo con la parola *revolventi*.

(4) Cioè otto quelle di Giove e di Crono (aventi quattro sfere ciascuno secondo Callippo), e venticinque quelle degli altri cinque astri (aventi ciascuno cinque sfere secondo Callippo).

(5) Cioè della Luna.

(6) Questo numero già così stava negli antichi esemplari, per testimonianza di Sosigene, Temistio, Simplicio, Alessandro e Porfirio, nei loro commenti ad Aristotele. Vedi su questo numero l'Appendice II, § 12.

(1) Brandis, *Scholia in Aristotelem edidit Academia Regia Borussica* (Berolini 1836), p. 498-504; Simplicii, *Commentarius in IV libros Aristotelis De Cœlo ex recensione Sim.* Karstenii, *mandato Regiæ Academiæ disciplinarum Nederlandicæ editus* (Trajecti ad Rhenum 1865), p. 219-229. Non ho tenuto conto dell'edizione aldina del 1526, malgrado le notevolissime differenze ch'essa presenta colle edizioni più recenti. Consta infatti fin dal 1810, per le ricerche d'Amedeo Peyron, d'illustre memoria, che l'aldina non è un testo originale, ma sì bene una traduzione in *greco*, fatta sopra una versione *latina* anteriore. Vedi Peyron, *Empedoclis et Parmenidis fragmenta ex codice Taur. restituta et illustrata*, Lipsiæ 1810, pag. 3-26. Ho pure fatto confrontare alcuni passi col Codice di Simplicio, che esiste presso la Biblioteca della Regia Università di Torino.

(2) ἀνελιττουσῶν. È il nome con cui si trovano frequentemente designate le sfere d'Eudosso dagli

2. Ad Eudosso dunque, ed a quelli che furono prima di lui, pareva il Sole moversi di tre movimenti, cioè di quello che segue la rivoluzione delle fisse da oriente in occidente, del moto che conduce secondo l'ordine inverso per i dodici segni, e d'un terzo movimento laterale rispetto al circolo mediano dello zodiaco; il qual ultimo fu concluso da questo, che il Sole nei solstizj estivi ed invernali non sorge sempre dal medesimo luogo (3). Per questo Eudosso stabilì, il medesimo esser portato da tre sfere, che Teofrasto chiama ἀνάστρους (prive di stelle), perchè non portano alcuna stella, connessa ciascuna con le inferiori, e condotta in giro dalle superiori. Perchè, essendo il Sole animato da tre movimenti, era impossibile farlo muovere in contrarie parti da una sola ed identica sfera; essendo che nè il Sole, nè la Luna, nè gli altri pianeti si muovono da loro medesimi, ma vanno in giro fissati sopra un corpo circolare. Veramente, se il giro del movimento in longitudine si facesse nel medesimo tempo, che la digressione secondo la latitudine, sarebbero sufficienti due sfere: una pel moto, secondo le fisse da oriente in occidente; l'altra girante intorno ad un asse fissato nella prima perpendicolarmente al circolo obliquo, lungo il quale apparirebbe il Sole fare il suo cammino. Così non essendo le cose, e tal circolo essendo percorso in un tempo diverso da quello in cui si restituiscono le digressioni in latitudine, è necessario supporre ancora una terza sfera, affinchè a ciascuno dei fenomeni osservati abbiasi un corrispondente movimento. Così dunque, avendosi tre sfere concentriche fra loro e concentriche all'universo, (Eudosso) suppose che la più esterna giri intorno ai poli del mondo nello stesso senso che la sfera delle fisse, compiendo la sua rivoluzione nel medesimo tempo: che la seconda, minore della prima e maggiore della terza, giri da occidente verso oriente intorno ad un asse, come abbiam detto, perpendicolare al piano del circolo che passa per lo mezzo dello zodiaco; e che l'ultima e più piccola di tutte sia anch'essa condotta in giro nel medesimo senso che la seconda, ma intorno ad un altro asse immaginato perpendicolarmente al piano d'un certo circolo massimo ed obliquo, che il Sole si suppone descrivere col proprio centro, portato com'è dalla sfera minore di tutte, nella quale è fissato. E il ritardo prodotto da questa sfera (Eudosso) suppone di gran lunga più lento, che quello prodotto dalla sfera che la contiene, ed è media di posizione e di grandezza: com'è chiaro dalla Memoria che egli scrisse *intorno alle velocità* (περὶ ταχῶν). Ora, la maggiore delle tre sfere, nel suo moto con cui accompagna le fisse, rivolge anche le altre due, per questo ch'essa in sè porta i poli (della seconda), e la seconda sfera quelli della terza, a cui è attaccato il Sole. Similmente (la seconda) avendo in sè i poli (della terza), la fa girare del proprio moto, e con essa anche il Sole; onde questo sembra girarsi dall'orto all'occaso. Che se le due sfere media (4) e minima fossero per sè stesse immobili, il Sole si moverebbe di moto esattamente uguale ed isocrono alla rivoluzione (diurna) dell'Universo. Ma rivolgendosi quelle due in direzione contraria, il ritorno del Sole da un levare al levare consecutivo ritarda rispetto al tempo sopradetto. E tanto basti del Sole.

3. Rispetto alla Luna, le cose furono (da Eudosso) ordinate parte in modo simile, parte in modo diverso. Anch'essa è portata da tre sfere, perchè anche in essa furono osservati tre movimenti. Di esse, una si muove similmente al moto delle fisse; l'altra gira in senso inverso alla

---

autori posteriori a lui. Ho evitato nella presente Memoria questa designazione, come quella che presenta qualche ambiguità, avendo Aristotele (v. qui sopra Appendice I) designato col medesimo nome quella classe speciale di sfere da lui aggiunte, che servono a distruggere i movimenti delle altre. Noi indicheremo sempre col nome di *deferenti* le sfere motrici: con quello di *restituenti* o *reagenti* quelle aggiunte da Aristotele: col nome generale di *omocentriche* o *di revolventi* l'insieme delle une e delle altre, come nel corso della Memoria si è fatto.

(3) Sottintendi *dell'orizzonte*.

(4) Leggo *μέση* col BRANDIS. KARSTEN ha *μεγίστη*, ciò che è senza dubbio erroneo.

prima, intorno ad un asse perpendicolare al piano dell'eclittica (5), appunto come pel Sole. La terza non è intieramente come la terza sfera del Sole, essendo ad essa simile per la posizione, ma non pel movimento, il quale succede in senso contrario a quello della seconda sfera, e in senso simile a quello della prima, con lenta rivoluzione intorno ad un asse perpendicolare al piano del circolo che sembra percorso dal centro della Luna: di questo piano l'inclinazione sul piano dell'eclittica è uguale alla massima digressione della Luna in latitudine. E manifestamente la distanza dei poli della terza sfera da quelli della seconda, contata sulla periferia del circolo massimo, immaginato per ambidue questi poli, è uguale alla metà di tutto il movimento della Luna in latitudine. La prima sfera poi suppose (Eudosso) per (spiegare) il moto suo (diurno) da oriente in occidente; la seconda per il ritardo che nella Luna si osserva lungo lo zodiaco (moto diretto in longitudine); la terza, perchè essa non sembra raggiungere nei medesimi punti dello zodiaco la sua posizione più boreale e la sua posizione più australe, ma trasporta sempre questi punti contro l'ordine dei segni: onde il moto di questa sfera succede pel medesimo verso che quello della sfera delle fisse. Ed a cagione della piccola quantità della retrogradazione, che i suddetti punti fanno nello spazio di ciascun mese, (Eudosso) suppose assai lento questo moto della terza sfera verso occidente. Questo per la Luna.

4. Rispetto ai cinque pianeti, Aristotele, esponendo l'opinione d'Eudosso (6), dice, che essi si muovono portati da quattro sfere ciascuno, delle quali la prima e la seconda sono le stesse, ed hanno la stessa posizione che le prime due sfere del Sole e della Luna. Per ciascun pianeta la sfera che contiene tutte le altre gira intorno all'asse del mondo dall'orto all'occaso nello stesso periodo che la sfera delle fisse; la seconda, la quale ha i poli nella prima, fa anche la sua rivoluzione nel senso opposto da occidente in oriente intorno all'asse ed ai poli dell'eclittica in un periodo eguale al tempo che ciascun pianeta sembra impiegare a far il giro di tutto lo zodiaco. (Eudosso) dice quindi che per le stelle di Ermes e di Eosforo la rivoluzione della seconda sfera si fa in un anno, per quella di Ares in due anni, per quella di Giove in dodici, in trenta per la stella di Crono, che gli antichi chiamavano l'*astro del Sole*.

5. Le altre due sfere (dei pianeti) stanno poi come segue: la terza sfera di ciascuno ha i poli lungo il circolo dell'eclittica, che si può immaginare descritto nella seconda sfera dello stesso pianeta, e si gira da mezzodì a settentrione in un periodo uguale all'intervallo, che ciascuno impiega da un'apparizione all'apparizione seguente (7), durante il quale esso prende rispetto al Sole tutte le configurazioni: il quale intervallo i matematici chiamano *rivoluzione sinodica* (8). Questo è diverso per i diversi pianeti, e quindi la rivoluzione della terza sfera non è uguale per tutti (i pianeti); ma, secondo Eudosso, per la stella d'Afrodite dura diciannove mesi, per quella di Ermes tre mesi e due terzi (9), per quella di Ares otto mesi e venti giorni (10), per le stelle di Giove e di Crono tredici mesi prossimamente per ciascuna. Tale dunque è il moto e il tempo rivolutivo per la terza sfera. La quarta sfera, che è quella

(5) Per brevità, alla perifrasi: *circolo che divide per mezzo lo zodiaco*, sostituisco la parola *eclittica*, sebbene questo nome non si trovi usato dagli antichi prima di Achille Tazio, scrittore del quarto secolo dell'êra cristiana.

(6) Vedi il passo del libro XII della *Metafisica*, riferito qui sopra nella Appendice I.

(7) Quando, dopo la congiunzione col Sole, esce dai raggi solari, e forma alla mattina ciò che si chiama *apparizione* (φάσις) o *levare eliaco*.

(8) διεξόδου χρόνον. È il tempo della rivoluzione nell'epiciclo secondo il sistema Tolemaico.

(9) ἐν μησὶ τρισὶ δίμοιρον Karsten. Brandis ha la variante equivalente ἐν ἡμέραις δέκα καὶ ἑκατόν.

(10) Questa durata è falsa, ma tutte le edizioni portano tal numero, e così pure il latino di Guglielmo da Meerbeke.

che porta l'astro, si aggira secondo un certo circolo obliquo intorno a poli peculiari (e diversi) per ciascun pianeta, con periodo sì uguale a quello della terza sfera, ma in senso contrario da levante a ponente. Questo circolo obliquo è inclinato sul massimo dei paralleli, che sono nella terza sfera, secondo ch'egli dice, nè in modo uguale, nè della medesima quantità in tutti.

6. Manifestamente poi quella delle sfere, che si muove come la sfera delle fisse, fa girare con sè in ugual modo le altre, che portano ciascuna i poli della seguente, e così anche quella che porta l'astro, e l'astro insieme; e per questo modo produce il levare e il tramontare di ciascuno di essi. La seconda sfera poi li fa muovere nel giro dei dodici segni, come quella che si aggira intorno ai poli dell'eclittica, e trasporta verso le parti conseguenti dello zodiaco (11) le altre due sfere coll'astro, nel tempo che ciascun pianeta a noi sembra percorrere il detto circolo. La terza sfera, che ha i suoi poli nella seconda collocati lungo l'eclittica, rivolgendosi da mezzodì a settentrione e da settentrione a mezzodì, conduce seco la quarta, che porta l'astro, e cagiona il movimento di questo in latitudine. Nè però è sola a produrre questo effetto; perchè, quanto seguendo la medesima (terza sfera) l'astro si è avanzato verso i poli dell'eclittica e si è avvicinato ai poli del mondo, (di altrettanto retrocedendo) la quarta sfera, che gira intorno ai poli del circolo obliquo su cui è l'astro, e compie la sua rivoluzione in senso contrario alla terza da levante verso ponente in egual tempo, gli fa di più traversare l'eclittica, obbligando l'astro a descrivere da ambi i lati di questo circolo la (linea curva) detta da Eudosso *ippopeda*. Questa occupa appunto (co' suoi flessi) tanta larghezza, quanto è il moto dell'astro in latitudine; ciò che fu causa di rimproveri contro di Eudosso. Tale è il sistema delle sfere secondo Eudosso: ventisei di numero, distribuite sopra sette (astri), cioè sei per il Sole e per la Luna, e venti per gli altri cinque.

7. Callippo Ciziceno, il quale studiò con Polemarco conoscente d'Eudosso, venne con esso Polemarco in Atene per conversare con Aristotele sulle invenzioni d'Eudosso, e per rettificarle e completarle col suo concorso. Perchè, credendo Aristotele, che tutte le cose celesti dovessero muoversi intorno al centro del mondo, preferì la supposizione delle sfere revolventi omocentriche all'universo, e non quella degli eccentri, adottata da più recenti... Intorno a Callippo, Aristotele scrisse quanto segue, nel libro duodecimo della Metafisica: « Callippo suppose la medesima disposizione di sfere, che Eudosso, cioè la medesima successione nelle distanze, e attribuì il medesimo numero di sfere tanto a Giove che a Crono; ma pel Sole e per la Luna opinò doversi aggiungere due sfere (a ciascuno) per rendere ragione delle apparenze; ai pianeti rimanenti, una per ciascuno. » Sono dunque, secondo Callippo, in tutto le sfere cinque volte cinque, più due volte quattro, il che fa trentatrè sfere. Non si conosce però alcuno scritto di Callippo, il quale spieghi la ragione delle sfere aggiunte, nè Aristotele la diede. Eudemo tuttavia narrò brevemente per ragione di quali apparenze (Callippo) pensava fossero da aggiungersi quelle sfere: riferisce infatti che il medesimo diceva, che se veramente esistono fra i tempi dei solstizj e degli equinozj differenze tali d'intervallo, quali Eutemone e Metone credettero (d'aver trovato), non sono sufficienti a ciascuno (Sole e Luna) tre sfere per salvare i fenomeni, e ciò a cagione dell'anomalia che ne consegue nei loro movimenti. La ragione poi, per cui (Callippo) aggiunse una sola sfera per ciascuno dei tre pianeti Ares, Afrodite ed Ermes, fu spiegata brevemente e chiaramente da Eudemo (12).

---

(11) Cioè da occidente in oriente: secondo il termine tecnico latino, *in consequentia*.

(12) Sembra che qui manchi qualche cosa nel testo di Simplicio.

8. Ma Aristotele, dopo narrata l'opinione di Callippo intorno alle sfere revolventi, aggiunse: « Affinchè dalla simultanea combinazione di tutte (queste sfere) si renda ragione delle apparenze, è necessario, per ciascuno dei pianeti, aggiungere alle precedenti altrettante sfere reagenti meno una, le quali restituiscano sempre alla medesima posizione la prima sfera dell'astro immediatamente inferiore, perchè così soltanto è possibile che si producano i movimenti dei pianeti. » Queste cose essendo dette da Aristotele così brevemente e chiaramente, Sosigene, nel lodarne la sagacità, intraprese di trovare a qual necessità servissero le sfere da lui aggiunte (13); e dice essere necessario introdurle nelle ipotesi, affinchè ne derivi posizione e velocità conveniente tanto per quella sfera che rappresenta il moto diurno di ciascun pianeta, quanto per le altre a quella inferiori. Perchè deve ognuna delle sfere simili (per moto e per posizione) a quella delle fisse, o ad un'altra, moversi con questa intorno al medesimo asse ed in un periodo uguale: delle quali cose niente si può ottenere senza l'addizione delle sfere, di cui parla Aristotele. Prendiamo, dice Sosigene, per spiegarci più chiaramente, quelle sfere che portano l'astro di Giove. Se dunque nell'ultima delle quattro (sfere) di Crono, nella quale questo pianeta è incastrato, adatteremo i poli della prima sfera di Giove: in che modo potranno questi rimanere nell'asse della sfera delle fisse, mentre la sfera che li porta si aggira intorno ad un asse diverso e obliquo a quello? Eppure è necessario che quei poli rimangano sul detto asse del movimento più esteriore, se vogliamo che la sfera girante intorno ad essi serbi la disposizione che ha quella delle stelle fisse. Ora, poichè le tre (ultime) sfere che portano l'astro di Crono, girano insieme connesse, e connesse colla prima, avendo ciascuna una velocità sua propria: certamente il moto della quarta non sarà semplice, ma composto con quelli di tutte le sfere superiori. Mostreremo infatti, che quando più sfere si rivolgono in sensi fra loro contrarj, si perde una parte delle velocità appartenenti alle loro rotazioni; quando invece i movimenti cospirano, alla celerità propria di ciascuna (delle inferiori) si aggiunge altro movimento comunicato dalle superiori. Se quindi all'ultima sfera, a cui è fissato l'astro di Crono, si connetta immediatamente la prima di Giove, assegnandole la velocità che le conviene, affinchè nella conversione (diurna) del mondo compia anch'essa il suo giro nel medesimo verso; i movimenti delle sfere che stanno [di sopra non le permetteranno di conservare questa sua velocità, ma vi sarà un'addizione; perchè si moveranno verso l'occaso e la sfera portata e quelle altre pel medesimo verso (14). Lo stesso vale delle altre sfere successive; il movimento diventerà vieppiù composto, ed i loro poli usciranno dalla posizione loro conveniente. Ma, come abbiamo detto, è necessario che non avvenga nè l'una, nè l'altra di queste cose. Affinchè dunque ciò non avvenga, e non si produca così alcun disordine, immaginò (Aristotele) « le sfere reagenti, e restituenti sempre alla medesima posizione la prima sfera dell'astro immediatamente inferiore ». Perchè tali appunto sono le sue parole, ed indicano ambo i motivi per cui egli quelle sfere introdusse: cioè col dir « reagenti », la restituzione del movimento alla propria velocità: col dir

(13) Lungo tempo sono stato dubbioso, se non fosse meglio sopprimere affatto quanto segue da questo punto fino al § 14, dove in più pagine sono diluite idee, che più chiaramente noi esprimeremmo con dieci linee. A giudicare da questo tratto, nel quale Simplicio per lo più riferisce testualmente, o quasi, le parole di Sosigene, dovremmo credere che il celebre riformatore del Calendario romano fosse il più prolisso e il più nojoso scrittore de' suoi tempi. Tuttavia mi sono finalmente deciso a non troncar nulla, non foss'altro che per rispetto a quel filosofo-astronomo, del quale questo è forse l'unico saggio di qualche importanza, che sia arrivato fino a noi.

(14) Cioè le quattro sfere di Saturno, le quali già tutte hanno il moto diurno della prima di esse; la prima di Giove per supposizione.

« restituenti sempre alla stessa posizione la prima sfera dell'astro immediatamente inferiore », la stabilità dei poli nella conveniente posizione. Secondo questi poli infatti s'immagina la positura delle sfere mobili, essendone queste i soli punti fissi. E disse poi che da quelle sfere restituenti viene ristabilita la prima sfera dell'astro immediatamente inferiore, perchè prendendo questa, in virtù di tale restituzione (15), la posizione e la velocità che le si compete, ogni cosa nelle sfere consecutive (dello stesso astro) si ordina a dovere. Come poi questo accada, lo dimostrò Sosigene premettendo alcune cose utili al discorso, di cui ecco qui un sunto.

9. Date essendo due sfere omocentriche, come DE, ZH (16), più una terza esteriore che le contenga, o fissa, o conducente le altre in giro (17): poniamo che le due prime si rivolgano di moti contrarj (sui medesimi poli) con eguale velocità, ossia in ugual tempo; dico che tutti i punti della sfera interiore conserveranno rispetto alla sfera più esterna una medesima posizione, come se la sfera interiore non fosse stata mossa. Poniamo che DE sia mossa come da A verso B: se essa portasse seco la minore ZH, e questa non si rivolgesse in senso contrario, si vedrebbe, al passare di D sotto B, venir Z sotto B (18) in egual tempo. Ma se la ZH è mossa dalla DE, e nello stesso tempo ruota di moto proprio in senso contrario, di quanto essa ZH è mossa avanti, di tanto essa stessa regredirà: onde, quando D sarà sotto B, Z resterà sotto A dov'era prima, ed apparirà la verità della proposizione. Rimanendo dunque fissa la AB, è chiaro quanto si è dimostrato, e che succedendo i due moti contrarj, ogni punto della sfera interiore rivoluta e controvoluta conserverà sempre rispetto ai medesimi punti della sfera esterna la medesima posizione: il che non avverrebbe, se si rivolgesse soltanto in un senso. Se poi AB fosse in movimento, o nello stesso senso della seconda sfera DE o in senso contrario, le stesse cose avverranno circa i punti della terza sfera ZH, purchè questa insieme sia rivoluta con DE e controvoluta come prima. Infatti, se la sfera AB gira da A verso B portando seco la DE in modo che D venga verso E, la sfera di mezzo DE si volgerà o nel medesimo senso che AB, o nel senso opposto a qualsiasi velocità rispetto alla AB, ma però sempre con periodo uguale a quello della ZH; e portando seco questa, farà che il punto Z esca fuori dalla dirittura di A. Ma la terza sfera rivolgendosi (da sè) in contrario, di nuovo porterà Z sotto A, e lo stesso continuamente accadendo, tutti i punti della sfera ZH rimarranno sotto i medesimi punti della sfera AB. Così dunque è dimostrata la proposizione per le sfere che si aggirano intorno al medesimo asse. Lo stesso vale però anche quando non si muovono intorno al medesimo asse (19). Perchè la coincidenza dei punti sotto i medesimi punti non è prodotta dal moversi (questi punti) sotto i medesimi paralleli, ma dal volgersi e dall'opposto rivolgersi della sfera contenuta (ZH) rispetto alla contenente (AB), per cui quella tanto perde di movimento, quanto guadagnava; sia che questi opposti movimenti si facciano in un circolo obliquo, oppure in un circolo perpendicolare (all'asse intorno a cui si muove AB).

10. Di nuovo, se abbiansi due sfere omocentriche mosse nella medesima direzione con certa

(15) *ἀνάλειψιν* Karsten. *ἀνείλησιν* Brandis.

(16) Vedi la figura 20, la quale non trovandosi in alcuna delle edizioni, ho cercato di ristabilire coll'ajuto del testo.

(17) Leggo con Brandis *εἴτε μενούσης εἴτε περιαγομένης ἐκείνας*; ciò che dà un senso migliore della lezione di Karsten, *εἴτε κινουμένης εἴτε μενούσης τῆς περιεχούσης*, che non spiega abbastanza.

(18) Tanto Brandis quanto Karsten hanno A invece di B: ciò che è manifestamente un errore, ed in contraddizione con quello che segue.

(19) Cioè quando l'asse della prima sfera AB è diverso dall'asse comune intorno a cui in tempi uguali e in senso contrario si rivolgono la seconda e la terza sfera DE, ZH.

velocità, e si metta che la minore non solo si muova colla maggiore, ma sia dotata pur di velocità propria ed uguale nel medesimo senso: il movimento così composto (della minore) si farà con velocità doppia. E se la velocità (propria) della minor sfera sarà doppia, la velocità sua composta sarà tripla, e così di seguito. Perchè se la maggiore muoverà la minore di un quadrante, e la minore con ugual velocità propria procederà d'un quadrante, questa avrà avanzato di due quadranti; e quindi il suo moto composto di due sarà doppio del moto dell'altra. Queste cose, dice (Sosigene), stanno pel caso in cui i movimenti si facciano intorno ai medesimi poli. Che se i poli saranno diversi, diverso sarà pure l'effetto, a cagione dell'obliquità dell'altra sfera (rispetto alla prima). Perchè allora le velocità non si comporranno in questa maniera, ma, come si usa dimostrare col parallelogramma, produrranno un movimento secondo il diametro (20), composto di due movimenti, dei quali l'uno è quello di un punto che si muova seguendo la lunghezza del parallelogramma, l'altro di un punto che si muova percorrendo la larghezza del parallelogramma in egual tempo che impiega il primo a percorrer la lunghezza. Perchè in tal modo il punto si troverà simultaneamente all'altro estremo così del diametro, come della lunghezza di ciascuno dei lati percorsi: e siccome il diametro non è eguale alla linea spezzata formata da questi lati, ma minore, così la velocità composta delle due sarà minore della loro somma (21). Il simile dicasi, quando rivolgendosi due sfere omocentriche intorno ai medesimi poli, od intorno a poli diversi, ed in direzioni contrarie, in guisa che la minore ad un tempo sia portata dalla maggiore, e si mova (di moto proprio) contro a quella: ogni punto della minore impiegherà a far la sua rivoluzione più tempo, che non occorrerebbe, se fosse soltanto invariabilmente connessa colla maggiore. Per questo la restituzione del Sole, da un levare a un levare consecutivo, è più lenta che la rivoluzione del mondo, avendo esso un moto più tardo in contrario senso. Che se invece il Sole avesse un movimento uguale a quello delle fisse, la sua rivoluzione accompagnerebbe queste, ed esso nascerebbe sempre col medesimo punto (della sfera stellata).

11. Premesse queste cose, Sosigene, venendo a ciò che fu detto da Aristotele sulla necessità di aggiungere per ciascun pianeta altrettante sfere reagenti (quante deferenti ne assumeva Callippo) meno una, se si vogliono salvare le apparenze, espone come segue la teoria delle sfere secondo Aristotele. Sia dunque, delle sfere che portano Crono, la prima mossa al modo di quella delle fisse, la seconda lungo l'eclittica, la terza si rivolga perpendicolarmente all'eclittica, da ostro verso settentrione; il circolo (equatoriale) di questa sarà perpendicolare all'eclittica, avendo in essa i poli, perchè si segano perpendicolarmente i circoli (massimi) che passan l'uno pei poli dell'altro. La quarta sfera poi, che contiene l'astro, lo muova secondo un circolo obliquo, allo scopo di limitarne l'escursione in latitudine verso l'Orsa, affinchè non si avvicini troppo ai poli del mondo. Bisogna ora immaginare, oltre alle quattro deferenti, un'altra quinta sfera che sia mossa intorno ai medesimi poli che la quarta, in senso contrario ed in egual tempo. Questa, essendo mossa in contrario della quarta, sui medesimi poli, con eguale velocità, distruggerà il movimento della quarta, e la velocità apparirà diminuita (22). I punti della terza sfera

(20) Cioè la diagonale.

(21) Ecco enunziato qui da Sosigene, contemporaneo di Giulio Cesare, il principio della composizione dei movimenti, con tutta la chiarezza possibile. La dimostrazione di quel principio col parallelogramma era cosa nota nelle scuole. Al medesimo pure allude Gemino, alquanto più antico di Sosigene, presso Proclo *Comm. in Eucl.*, pag. 106 ed. Friedlein. La base di queste antiche dottrine sul moto composto sta presso Aristotele nel cap. 2 dei *Problemi Meccanici*, dove il teorema del parallelogramma delle velocità si trova dimostrato.

(22) Più esattamente: diminuirà il numero delle velocità che compongono il movimento. La quinta sfera, o prima delle reagenti, si muoverà come la terza delle quattro deferenti.

appariranno sulla quinta sempre secondo il medesimo cateto (23). Dopo la quinta bisogna immaginarne una sesta, avente gli stessi poli che la terza, la quale si rivolga colla stessa velocità ed in senso opposto a questa, per salvare le apparenze. Dopo queste bisogna aggiungere una settima sfera, che controvolga la seconda e giri con essa intorno ai poli dell'eclittica in egual tempo, e distrugga la velocità che è propria alla seconda, e dalla seconda è comunicata alle sfere inferiori (perchè la seconda movendosi colla sfera delle fisse, comunicava anche la velocità alle sfere inferiori dall'orto all'occaso). Così dunque (la settima) si moverà al modo delle fisse, ma non avrà tuttavia la medesima posizione che la sfera delle fisse, rivolgendosi intorno a poli diversi da oriente in occidente (24). Sotto questa rimane da immaginarne un'ottava, la quale sarà la prima di Giove, rettamente osservando Sosigene, che non è vero, che l'ultima delle tre reagenti (di Crono) sia la prima delle sfere di Giove, come credettero alcuni, i quali dissero, che l'ultima delle sfere distruggenti i moti superiori è la prima delle sfere portanti l'astro immediatamente inferiore, e che la settima sia quella che noi diciamo ottava, e la prima delle sfere di Giove (25). Onde loro bisogna numerare due volte la medesima sfera, per salvare il numero di quelle poste da Aristotele. È infatti necessario, che per ciascun astro il numero delle sfere restituenti sia d'una unità minore di quello delle deferenti; quindi per Crono e per Giove, che hanno quattro deferenti, tre saranno le restituenti per ciascuno; per gli altri quattro, Ares, Afrodite, Ermes e Sole, che hanno cinque deferenti, le restituenti saranno quattro. Da Crono e da Giove abbiamo dunque due volte tre restituenti, quattro volte quattro da Ares, Afrodite, Ermes e Sole: tutte insieme sono perciò ventidue. Ma da Crono e da Giove abbiamo otto deferenti, venticinque dagli altri cinque. Alle trentatrè deferenti sommando le ventidue restituenti si ha il numero totale di cinquantacinque sfere. Perchè alle deferenti della Luna non occorrono restituenti, dicendo Aristotele, che quelle non hanno ad esser rivolte in contrario, che portano l'astro inferiore a tutti gli altri. È dunque palese, che tale appunto dev'essere il numero di tutte.

12. Quello poi che soggiunse Aristotele, « che se al Sole ed alla Luna non si aggiungono i movimenti che abbiamo detto, il numero totale delle sfere è di quarantasette », ha prodotto confusione. Perchè, se leviamo le due sfere del Sole e della Luna aggiunte da Callippo, è chiaro che bisogna toglierne al Sole due altre restituenti contrarie a quelle (perchè tolte le due prime, bisogna anche levare quelle che ne distruggon la rotazione): in tutto bisogna dunque levarne sei, cioè, due deferenti e due restituenti del Sole, più le due aggiunte alla Luna da Callippo: così facendo però, invece di quarantasette, per numero totale rimane quarantanove. Aristotele disse quarantasette, forse non facendo attenzione, che alla Luna non quattro, ma solo due bisogna levarne (26). A meno che non si voglia dire, ch'egli abbia tolto al Sole le quattro sfere restituenti da lui stesso aggiunte, più le due aggiunte da Callippo: con che dalle 55 hannosi a sottrarre 8, e rimane 47, numero voluto. Noi potremmo qui ben concedere, che siano tolte le sfere restituenti alla seconda e alla terza delle deferenti so-

---

(23) Cioè, si projetteranno radialmente sopra punti identici della quinta sfera secondo un medesimo raggio.

(24) È falso: i poli sono i medesimi.

(25) L'opinione di questi tali, checchè ne dica Sosigene, è la vera. È manifesto, che la terza delle reagenti di Crono segue appunto il moto delle fisse, e che in essa si può adattare subito la seconda delle sfere deferenti di Giove. Onde è inutile la prima delle deferenti di Giove, come quella che si rivolge esattamente allo stesso modo che l'ultima delle reagenti di Crono.

(26) Questa sembra la spiegazione più probabile dell'errore dello Stagirita.

lari, avendo egli stesso detto, che le sfere inferiori non hanno le restituenti che ne distruggano il moto (27): tuttavia Sosigene giustamente osservà, che anche per riguardo alla Luna è necessario conservare le restituenti (superiori ad essa), se non vogliamo che la velocità dei moti superiori, aggiunta a quella delle deferenti lunari, faccia correre la Luna con velocità diversa da quella delle stelle fisse verso occidente (28). Ed allora, dato questo, che la Luna sola sia priva di sfere restituenti, il numero 47 non si può raggiungere: ciò che imbarazzò molto Alessandro e Porfirio nei loro Commenti sul XII della Metafisica. Sosigene nota esser meglio ammettere, che sia corso un errore nella scrittura del numero, che creare questa settima e questa ottava delle sfere (necessarie a dedursi dal numero 55 per ottenere il numero aristotelico 47); perchè in nessun modo si arriva a far concordare il numero col discorso, e il numero totale non risulta mai di 47, come Aristotele dice.

13. Aggiunge poi questo Sosigene, esser chiaro dalle cose dette, che in diverso senso queste sfere furono da Aristotele chiamate ἀνελιττούσαι (revolventi), e da Teofrasto ἀνανταφερούσαι (contraferenti). Esse sono infatti l'uno e l'altro: *rivolgono* in contrario senso i movimenti delle sfere superiori, e riportano a ritroso i poli delle sfere inferiori ad esse, distruggendo l'effetto di quelli, e riportando questi nella positura conveniente. È necessario infatti, che i movimenti superiori non si propaghino a tutte le sfere inferiori, e che i poli delle sfere inferiori coincidano lungo il medesimo cateto coi poli delle sfere omologhe (degli altri pianeti) affinchè, com'egli dice, siano riportate costantemente alla medesima posizione le prime sfere degli astri inferiormente collocati, e con queste evidentemente anche le altre sfere susseguenti (dei medesimi astri). Così soltanto, dice, si ottiene che il movimento delle stelle fisse produca tutti gli altri. E tanto basti di ciò.

14. E tale è il sistema delle sfere revolventi (ἡ διὰ τῶν ἀνελιττουσῶν σφαιροποιία), il quale non è sufficiente a salvare le apparenze; di che anche lo accusa Sosigene, dicendo: Non valgono le ipotesi dei seguaci d'Eudosso a salvare i fenomeni, non solo quelli scoperti dai recenti, ma anche quelli conosciuti prima, e da loro medesimi tenuti per veri. E che sarà a dire di quegli altri, di alcuni dei quali non potendo dare Eudosso la spiegazione, tentò di darla Callippo Ciziceno, se è vero che vi sia riuscito? Ma è certo che neppur di questo, com'è chiaro, alcun di loro intraprese la dichiarazione per mezzo di ipotesi prima di Autolico Pitaneo, il quale tuttavia non la potè dare (29): intendo parlare del fatto, che gli astri sembrano qualche volta a noi vicini, qualche volta lontani; ciò che per alcuni di essi è evidente a prima vista. Perchè l'astro detto di Afrodite, e quello detto di Marte, nel mezzo delle loro retrogradazioni (30) appajono molte volte più luminosi, così che quello di Afrodite nelle notti senza Luna fa projettar ombra ai corpi. Ma anche della Luna è facile vedere, ch'ella non si trova sempre alla medesima distanza da noi, perchè non appare sempre della mede-

(27) Simplicio vuol dire, che, data la facoltà di privare delle loro restituenti un certo numero delle deferenti più basse, si può privarne non solo le deferenti della Luna, ma anche le due ultime sfere del Sole, senza contraddire alla lettera del testo aristotelico.

(28) Espressione alquanto inesatta, della quale però il senso preciso è evidente.

(29) Qui intercalato si trova in ambe le edizioni stampate e nel latino ancora quanto segue: δηλοῖ δὲ ἡ πρὸς 'Αριστόθηρον αὐτοῦ διαφορά, cioè: « è manifesta la sua differenza con Aristotele ». Ambo i testi hanno veramente 'Αριστόθηρον., e identica lezione ha il M. S. di Simplicio, che esiste nella Biblioteca dell'Università di Torino. Questa glosa, la quale interrompe il senso e non ha qui nulla che fare, fu da noi omessa qui sopra.

(30) προηγήσεις, progressioni in avanti, cioè *in antecedentia* o verso occidente, che equivale alle retrogradazioni. Veramente la massima luce di Venere non succede nel mezzo delle sue retrogradazioni.

sima grandezza a chi la considera paragonandola con un altro oggetto. Ciò risulta anche da osservazioni fatte con istrumenti, perchè occorre ora un disco (τύμπανον) di undici dita, ora uno di dodici, collocato alla medesima distanza dall'osservatore, per impedirne a questo la vista. Intorno a ciò dà testimonianza, in favore delle cose dette, anche quanto accade in occasione delle eclissi perfette (cioè centrali) del Sole, ed è certo argomento della verità di quelle. Perchè, quando accade che i centri del Sole e della Luna si dispongono in linea retta colla nostra vista, non succedono sempre le medesime apparenze; ma talora avviene, che il cono, che è circoscritto alla Luna ed ha il vertice nel nostro occhio, è pure circoscritto esattamente al Sole: altre volte il Sole rimane tutto occultato a noi per un certo intervallo di tempo; altre volte ancora a questo effetto manca qualche cosa, così che nell'istante medio dell'eclisse, fuori della Luna rimane una specie di lembo annulare che lo circonda (31). Onde necessariamente tal diversità delle grandezze apparenti proviene da ciò, che le distanze loro sono ineguali, come accade delle cose che si trovano nell'aria. Quello poi che accade in questi casi, ed è manifesto alla vista, è verosimile accada anche agli altri (astri), sebbene non sia evidente all'osservazione. E non solo è verosimile, ma vero, perchè si manifesta nell'apparente anomalia del loro movimento da un giorno all'altro; mentre per la loro grandezza quale si vede, la differenza non è ovvia, perchè non molto grande è la loro escursione in alto e in basso, quella cioè che i matematici sogliono chiamare: movimento in profondità. Questo dunque essi non hanno cercato di spiegare, come quella (grandezza) sembri variare da un giorno all'altro, sebbene il problema ciò richiegga.

Ma non è neppur lecito dire, che a loro sia rimasta sconosciuta la variazione delle distanze di un medesimo astro. Infatti sembra, che Polemarco Ciziceno la conoscesse, ma che ne abbia fatto poco conto, come di cosa insensibile, perchè egli preferiva l'ipotesi delle sfere concentriche al centro dell'Universo. Ed è manifesto, che anche Aristotele nei *Problemi fisici* (32) trova a dubitare delle ipotesi degli Astronomi per questo, che la grandezza dei pianeti non sembra costante: dunque neppur egli fu intieramente soddisfatto colle revolventi, sebbene le abbia collocate concentricamente all'universo, dando loro un moto intorno al centro di questo (33). Ed invero si vede, da quanto dice nel XII della *Metafisica*, che egli non stimava sufficiente quanto fino a lui dagli Astronomi era stato detto intorno al movimento dei pianeti, perchè si esprime così (34): « Noi assumiamo qui per vero quello che dicono alcuni dei matematici, nello scopo di farci intendere, e per determinare in qualche modo i nostri pensieri intorno al numero (dei movimenti celesti); del resto, possiamo o far ricerca noi medesimi, o profittare delle informazioni ulteriori che possono darci coloro che sogliono

(31) È da notare, che tutte queste notizie appartengono a Sosigene, il quale avea su tale argomento idee molto più esatte, che non la maggior parte degli astronomi fino dopo Ticone. Ancora sul principio del secolo XVII si dubitava da alcuni della possibilità di un' eclisse totale. Sosigene, nei suoi libri περὶ τῶν ἀνελιττουσῶν, citati da Proclo, scriveva « che il Sole nelle eclissi perigee oltrepassa co' suoi lembi il disco lunare, coi quali illumina senz'impedimento ». Onde si vede che Sosigene conosceva le variazioni del diametro apparente tanto del Sole che della Luna. Anche qui, nel trattare direttamente delle sfere revolventi, egli aveva probabilmente per scopo di confutare quel sistema, dimostrando che la distanza del Sole da noi è variabile. (V. Procli *Hypotyposes* ed. Halma, p. 111).

(32) Oggi perduti.

(33) Tutti questi ragionamenti sui dubbj d'Aristotele intorno alle sfere omocentriche non debbono illudere il lettore: essi servono a scusare la defezione dei peripatetici dalle revolventi dello Stagirita, e l'adesione che (con buone ragioni) essi diedero, dietro l'esempio di Sosigene, alla teoria degli eccentri e degli epicicli.

(34) *Metaphys.* XII, 8.

occuparsi di queste cose, tenendo tutti in conto, accostandoci però alla sentenza più certa. » Ma enumerati nel medesimo libro (35) tutti i movimenti, aggiunge: « E tale sia il numero dei movimenti, onde con probabilità dobbiamo assumere, che le essenze ed i principj immobili e sensibili siano in egual numero: qual sia il necessario (numero), lasceremo dire ai più dotti di noi. » Le parole: *E tale sia*, e, *con probabilità*, e l'abbandonare la cosa ad altri *più dotti*, indicano dubitazione intorno all'argomento.

15. Dunque, secondo il consiglio d'Aristotele medesimo, sarà più vantaggioso seguire quei posteriori (Astronomi), che meglio resero ragione delle apparenze, sebbene neppur essi con intiera perfezione; anzichè i precedenti, i quali non avevano avuto ancora cognizione di tanti fenomeni, perchè non erano ancora arrivate in Grecia le osservazioni di 1903 anni (36), che, sulla preghiera di Aristotele, Callistene aveva spedito da Babilonia, e che, al dire di Porfirio, erano state conservate fino al tempo di Alessandro Macedone; e non avevano potuto dimostrare per mezzo d'ipotesi tutto quello che già conoscevano. Onde li accusa Tolomeo di aver introdotto un così gran numero di sfere al solo scopo di ricondurre la restituzione periodica dei sette pianeti alla rivoluzione delle stelle fisse... I posteriori Astronomi adunque, respingendo le ipotesi delle sfere revolventi, principalmente perchè non valgono a spiegare la differenza delle distanze e l'anomalia dei movimenti, alle omocentriche surrogarono le ipotesi degli eccentri e degli epicicli, se pure quella dei circoli eccentrici non fu già ideata dai Pitagorici, come alcuni altri narrano, e fra questi Nicomaco, e sull'autorità di Nicomaco, Jamblico.....

(35) Nel passo che forma la nostra Appendice I.

(36) Tanto Brandis e Karsten quanto il Codice di Torino, leggono: ἐτῶν χιλίων καὶ μυριάδων τριῶν: ciò che importa 31000 in luogo di 1903, numero dato dal latino e dall'edizione aldina. Tutti gli eruditi più recenti si sono attenuti alla versione 31000, la quale ha l'inconveniente di convertire in una favola impossibile una narrazione per sè possibilissima e confermata da scoperte recenti. Come dottamente osserva il Lepsius (*Chron. der Aegypter*, pag. 9), il dubbio è derivato dalla trasformazione del segno ϡ del 900 nel segno M della miriade. In favore della lezione 1903 parla pure la costruzione della frase qui sopra riferita, la quale suona assai meglio surrogando ἐννεακοσίων a μυριάδων: e il fatto, che il codice su cui Guglielmo di Meerbeke fece la sua traduzione latina sullo scorcio del secolo XIII, era probabilmente più antico di quello, da cui trassero la lezione di questo passo il Brandis e il Karsten. La questione sembra abbastanza importante per esser esaminata da capo da persone competenti, coll'ajuto di tutti i codici che si potranno ancora rinvenire.

Milano Lit. A. Meidenhauer

Milano, Lit. A. Molder